ETH-Aufnahmeprüfung Herbst 2014 – Physik

Bemerkungen

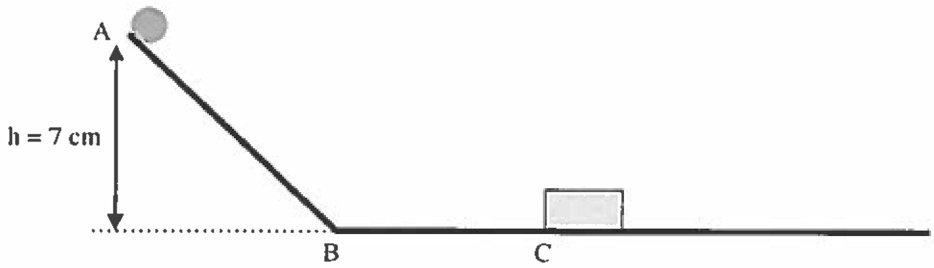
- Die Resultate müssen den vollständigen Lösungsweg und alle Zwischenresultate enthalten.
- Lösen Sie die Aufgaben wenn möglich direkt auf dem Aufgabenblatt (inklusive Rückseite).
- Für die Erdbeschleunigung rechnen Sie mit dem gerundeten Wert $g = 10\ m/s^2$.
- Numerische Werte sollen auf drei signifikante Ziffern gerundet werden; Wurzelterme sollen erst beim Schlussresultat numerisch berechnet werden. Lösungen können auch als Brüche angegeben werden.

Aufgabe 1 [4pt + 4pt]

(a) Eine Vollkugel aus Holz ($m_K = 200$ g) startet im Punkt A aus dem Stillstand und rollt reibungsfrei die schiefe Ebene bis zum Punkt B hinunter. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit der Kugel im Punkt B.

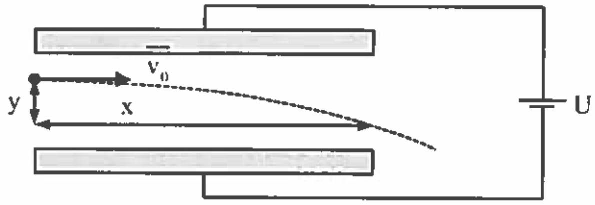
(b) Im Punkt B angekommen wird die Kugel ohne Energieverlust auf die horizontale Ebene aus Stein umgelenkt und rollt reibungsfrei weiter bis zum Punkt C. Dort befindet sich ein ruhender Holzklotz ($m_H = 300$ g), mit dem die Kugel vollkommen unelastisch zusammen stösst. Von nun an haftet die Kugel am Holzklotz. Bestimmen Sie die Strecke, welche beide Körper gemeinsam zurücklegen.

(Wenn Sie die Geschwindigkeit v_B der Kugel im Punkt B aus Teilaufgabe (a) nicht bestimmen konnten, rechnen Sie mit $v_B = 4\,m/s$.)



Aufgabe 2 [6 pt + 4 pt]

(a) Ein geladenes Teilchen der Masse m = 10 g fliegt zwischen zwei Kondensatorplatten mit einer horizontalen Anfangsgeschwindigkeit v_0 = 200 m/s und wird wie angegeben abgelenkt; seine Bahn verläuft in einer zu den Platten senkrecht stehenden Ebene parabelförmig. Bestimmen Sie die Ladung des Teilchens unter Berücksichtigung der Gravitationskraft.



x = 2 m
y = 2 mm
U = 1 V

Abstand d zwischen den Platten:
d = 2 cm

(b) Zwischen den Platten wird zusätzlich ein homogenes Magnetfeld (magnetische Flussdichte $\vec{B}$) angelegt, so dass das positiv geladenes Teilchen geradeaus fliegt.

(b_1) Bestimmen Sie die Richtung von $\vec{B}$.

(b_2) Ermitteln Sie eine Formel für die Ladung q des Teilchens als Funktion von m, v_0, d, U und B, wobei für die magnetische Flussdichte $\vec{B}$ diejenige mit dem kleinstmöglichen Betrag angenommen wird.

Aufgabe 3 [2 pt + 5 pt]

Eine Metallkugel ist vollständig in eine Flüssigkeit eingetaucht. Dem System wird eine bestimmte Wärmemenge zugefügt, so dass die Temperatur von Körper und Flüssigkeit sich um ΔT erhöht.

(a) Warum nimmt in aller Regel die auf die Kugel wirkende Auftriebskraft ab?

(b) In einem konkreten Beispiel nimmt die Auftriebskraft bei einer Temperaturerhöhung von 250 K um 10% ab. Um welches Metall könnte es sich handeln, wenn die Flüssigkeit Glycerin ist und man annimmt, dass die Ausdehnungskoeffizienten der zwei Stoffe in diesem Temperaturintervall konstant sind und keine Aggregatzustandsänderung stattfindet?

Aufgabe 4 [4 pt + 4 pt] – Die zwei Teilaufgaben sind unabhängig voneinander.

(a) Ein Wasserkocher bringt einen halben Liter kaltes Leitungswasser innerhalb von einer Minute zum Kochen. Ist ein solches Gerät an einer Steckdose, die auf 10 A gesichert ist, einsatzfähig?
(Treffen Sie bei dieser Aufgabe die nötige Temperaturabschätzung und runden Sie sinnvoll bei der numerischen Berechnung.)

(b) Die vereinfachte Version des dritten Kepler'schen Gesetzes lautet $\frac{r^3}{T^2} = \frac{G \cdot M}{4\pi^2}$.

wobei r: Radius der Kreisbahn eines Planeten — M: Zentralmasse (Sonne)
T: Umlaufzeit des Planeten — G: Gravitationskonstante

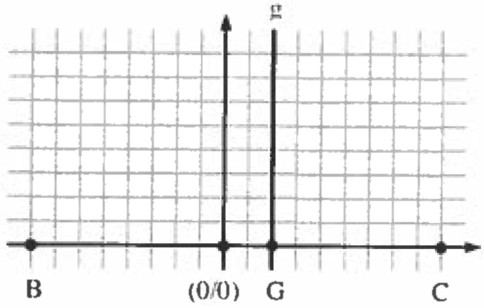
Leiten Sie dieses Gesetz her. Tipp: Überlegen Sie, welche Kraft die Rolle der Zentripetalkraft übernimmt.

Aufgabe 5 [3 pt + 4 pt]

In den Punkten B und C befinden sich zwei Schallquellen, die in alle Richtungen unter Normbedingungen ausstrahlen (phasengleich, 688 Hz). Ein Schallempfänger bewegt sich vom Punkt G ausgehend auf der Geraden g nach oben.

(a) Wie viele Male wird er konstruktive Interferenz empfangen?

(b) Bestimmen Sie die Koordinaten seines Standortes, wo zum zweitletzten Mal konstruktive Interferenz auftritt.
(Die asymptotische konstruktive Interferenz bei unendlicher Höhe soll ausser Acht gelassen werden.)

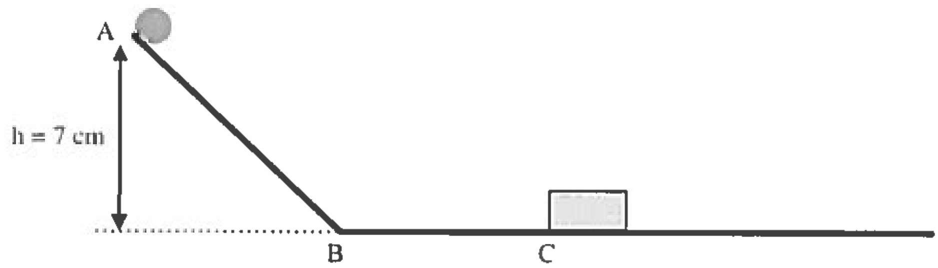


Gitterkonstante: 1 m

ETH-Aufnahmeprüfung Herbst 2014 – Physik (Lösungen)

Benotung
Maximale Anzahl Punkte: 40 pt. Die Note N berechnet sich für die Punktzahl p gemäss der Formel $N = 1 + \frac{p}{7}$, wobei auf halbe Noten zu runden ist (Viertelnote aufrunden).

Aufgabe 1 [4pt + 4pt]
(a) Eine Vollkugel aus Holz ($m_K = 200$ g) startet im Punkt A aus dem Stillstand und rollt reibungsfrei die schiefe Ebene bis zum Punkt B hinunter. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit der Kugel im Punkt B.
(b) Im Punkt B angekommen wird die Kugel ohne Energieverlust auf die horizontale Ebene aus Stein umgelenkt und rollt reibungsfrei weiter bis zum Punkt C. Dort befindet sich ein ruhender Holzklotz ($m_H = 300$ g), mit dem die Kugel vollkommen unelastisch zusammen stösst. Von nun an haftet die Kugel am Holzklotz. Bestimmen Sie die Strecke, welche beide Körper gemeinsam zurücklegen.
(Wenn Sie die Geschwindigkeit v_B der Kugel im Punkt B aus Teilaufgabe (a) nicht bestimmen konnten, rechnen Sie mit $v_B = 4\,\text{m/s}$.)



Lösung
(a) Energieerhaltung:

$$E_{pot,A} = E_{kin,B} + E_{rot,B}$$

$$m_K g h = \frac{1}{2} m_K v_B^2 + \frac{1}{2} J_K \omega_B^2 \qquad [1\text{ pt}]$$

$$m_K g h = \frac{1}{2} m_K v_B^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5} m_K r_K^2\right)\cdot\left(\frac{v_B}{r_K}\right)^2 \qquad [1\text{ pt}]$$

$$g h = \frac{1}{2} v_B^2 + \frac{1}{5} v_B^2 \quad \Rightarrow \quad v_B = \sqrt{\frac{10}{7} g h} = \sqrt{\frac{10}{7}\cdot 10\cdot 0.07}\,\text{m/s} = 1\,\text{m/s} \qquad [2\text{ pt}]$$

(b) Impulserhaltung in C:

$$m_K v_B = (m_K + m_H) w \quad \Rightarrow \quad w = \frac{m_K v_B}{m_K + m_H} = \frac{0.2\,\text{kg}\cdot 1\,\text{m/s}}{0.5\,\text{kg}} = 0.4\,\text{m/s} \qquad [1\text{ pt}]$$

Die kinetische Energie nach dem Stoss geht durch Reibungsarbeit verloren:

$$W_{Reibung} = E_{kin} \qquad [1\text{ pt}]$$

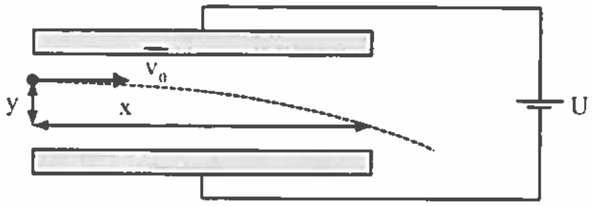
$$x \cdot \mu_G (m_K + m_H) g = \frac{1}{2}(m_K + m_H) w^2 \qquad [1\text{ pt}]$$

$$x = \frac{w^2}{2\mu_G g} = \frac{(0.4\,\text{m/s})^2}{2\cdot 0.3\cdot 10\,\text{m/s}^2} = \frac{2}{75}\,\text{m} \;\; (= 2.\overline{6}\,\text{cm}) \qquad [1\text{ pt}]$$

[Mit $v_B = 4\,\text{m/s}$: $w = 1.6\,\text{m/s}$, $x = \frac{32}{75}\,\text{m} = 42.\overline{6}\,\text{cm}$]

Aufgabe 2 [6 pt + 4 pt]

(a) Ein geladenes Teilchen der Masse m = 10 g fliegt zwischen zwei Kondensatorplatten mit einer horizontalen Anfangsgeschwindigkeit v_0 = 200 m/s und wird wie angegeben abgelenkt; seine Bahn verläuft in einer zu den Platten senkrecht stehenden Ebene parabelförmig. Bestimmen Sie die Ladung des Teilchens unter Berücksichtigung der Gravitationskraft.



x = 2 m
y = 2 mm
U = 1 V

Abstand d zwischen den Platten:
d = 2 cm

(b) Zwischen den Platten wird zusätzlich ein homogenes Magnetfeld (magnetische Flussdichte $\vec{B}$) angelegt, so dass das positiv geladenes Teilchen geradeaus fliegt.

(b_1) Bestimmen Sie die Richtung von $\vec{B}$.

(b_2) Ermitteln Sie eine Formel für die Ladung q des Teilchens als Funktion von m, v_0, d, U und B, wobei für die magnetische Flussdichte $\vec{B}$ diejenige mit dem kleinstmöglichen Betrag angenommen wird.

Lösung

(a) Parabelbahn: $x = v_0 \cdot t$ bzw. $|y| = \frac{1}{2} a \cdot t^2$ [1 pt]

$$\Rightarrow |y| = \frac{1}{2} a \cdot \left(\frac{x}{v_0}\right)^2$$ [1 pt]

$$\Rightarrow a = \frac{2|y| v_0^2}{x^2} = \frac{2 \cdot 0.002 \cdot 40'000}{4} m/s^2 = 40 m/s^2$$ [1 pt]

$$\Rightarrow F_{Res} = m \cdot a = 10^{-2} kg \cdot 40 m/s^2 = 0.4 N$$ [1 pt]

Kräfte:

$$F_C = F_{Res} - F_G$$

$$q \cdot E = F_{Res} - m \cdot g$$

$$q \frac{U}{d} = F_{Res} - m \cdot g$$ [1 pt]

$$q = \frac{d(F_{Res} - m \cdot g)}{U} = \frac{0.02 m (0.4 N - 0.01 kg \cdot 10 m/s^2)}{1 V} = 0.006 C$$ [1 pt]

(b) Die magnetische Flussdichte $\vec{B}$ muss eine Lorenzkraft bewirken, die nach oben gerichtet ist; $\vec{B}$ hat also zwingend eine Komponente, die senkrecht in die Blattebene hinein zeigt; zusätzlich kann sie eine Komponente parallel zur Geschwindigkeit aufweisen, welche keine Lorenzkraft verursacht. [2 pt]

Formel für die Ladung q:

$$F_L = F_C + F_G$$

$$qvB = q\frac{U}{d} + mg$$ [1 pt]

$$qvB - q\frac{U}{d} = mg$$

$$q\left(vB - \frac{U}{d}\right) = mg$$

$$q = \frac{mg}{vB - \frac{U}{d}} = \frac{mgd}{vBd - U}$$ [1 pt]

Aufgabe 3 [2 pt + 5 pt]
Eine Metallkugel ist vollständig in eine Flüssigkeit eingetaucht. Dem System wird eine bestimmte Wärmemenge zugefügt, so dass die Temperatur von Körper und Flüssigkeit sich um ΔT erhöht.
(a) Warum nimmt in aller Regel die auf die Kugel wirkende Auftriebskraft ab?
(b) In einem konkreten Beispiel nimmt die Auftriebskraft bei einer Temperaturerhöhung von 250 K um 10% ab. Um welches Metall könnte es sich handeln, wenn die Flüssigkeit Glycerin ist und man annimmt, dass die Ausdehnungskoeffizienten der zwei Stoffe in diesem Temperaturintervall konstant sind und keine Aggregatzustandsänderung stattfindet?

Lösung
(a) Bei einer Temperaturerhöhung nimmt die Dichte der Flüssigkeit ab, was die Auftriebskraft mindert. Dafür nimmt aber das Volumen der Kugel zu, was die Auftriebskraft erhöht. Der erste Effekt ist aber grösser, da die Volumenausdehnung bei Flüssigkeiten stärker ist als bei Festkörpern (Vergleich der Volumenausdehnungskoeffizienten von Flüssigkeiten und festen Stoffen in der Formelsammlung). [2 pt]

(b) Sei $F_A = \rho_{Glyc} \cdot g \cdot V_K$ die Auftriebskraft vor der Temperaturerhöhung und $F'_A = \rho'_{Glyc} \cdot g \cdot V'_K$ die Auftriebskraft nach der Temperaturerhöhung, so gilt:

- $V'_K = V_K(1+3\alpha\cdot\Delta T)$
- $\rho'_{Glyc} = \dfrac{m_{Glyc}}{V'_{Glyc}} = \dfrac{m_{Glyc}}{V_{Glyc}(1+\gamma\cdot\Delta T)} = \dfrac{\rho_{Glyc}}{1+\gamma\cdot\Delta T}$ [1 pt]

Es folgt:

$$F'_A = 0.9\cdot F_A$$

$$\frac{\rho_{Glyc}}{1+\gamma\cdot\Delta T}\cdot g\cdot V_K(1+3\alpha\cdot\Delta T) = 0.9\cdot\rho_{Glyc}\cdot g\cdot V_K \quad [1\text{ pt}]$$

$$1+3\alpha\cdot\Delta T = 0.9\cdot(1+\gamma\cdot\Delta T)$$

$$\alpha = \frac{0.9\cdot(1+\gamma\cdot\Delta T)-1}{3\cdot\Delta T} \quad [1\text{ pt}]$$

$$\alpha = \frac{0.9\cdot(1+0.5\cdot10^{-3}\cdot250)-1}{3\cdot250\,\text{K}}$$

$$\alpha = \frac{0.9\cdot1.125-1}{750\,\text{K}}$$

$$\alpha = \frac{0.0125}{750\,\text{K}} = \frac{\frac{1}{80}}{\frac{3000}{4}\,\text{K}} = \frac{4}{80\cdot3'000}\,\text{K}^{-1} = \frac{1}{60'000}\,\text{K}^{-1} = 16.7\cdot10^{-6}\,\text{K}^{-1} \quad [1\text{ pt}]$$

Es handelt sich um Kupfer ($\alpha = 16.8\cdot10^{-6}\,\text{K}^{-1}$). [1 pt]

Aufgabe 4 [4 pt + 4 pt] – Die zwei Teilaufgaben sind unabhängig voneinander.

(a) Ein Wasserkocher bringt einen halben Liter kaltes Leitungswasser innerhalb von einer Minute zum Kochen. Ist ein solches Gerät an einer Steckdose, die auf 10 A gesichert ist, einsatzfähig?
(Treffen Sie bei dieser Aufgabe die nötige Temperaturabschätzung und runden Sie sinnvoll bei der numerischen Berechnung.)

(b) Die vereinfachte Version des dritten Kepler'schen Gesetzes lautet $\frac{r^3}{T^2} = \frac{G \cdot M}{4\pi^2}$.

wobei r: Radius der Kreisbahn eines Planeten; M: Zentralmasse (Sonne); T: Umlaufzeit des Planeten; G: Gravitationskonstante

Leiten Sie dieses Gesetz her. Tipp: Überlegen Sie welche Kraft die Rolle der Zentripetalkraft übernimmt.

Lösung

(a) Annahme: Leitungswasser hat eine Temperatur zwischen 10°C und 20°C; die Temperaturdifferenz bis zum Siedepunkt beträgt somit mindesten 80 K.

Nötige Wärme: $Q = c_w . m_w \Delta T \approx 4'200 \cdot 0.5 \cdot 80\,J = 168'000\,J$ (oder mehr) [1 pt]

Elektrische Energie: $E_{el} = U \cdot I \cdot t = 230\,V \cdot 60 s \cdot I = 13'800\,Vs \cdot I$ [1 pt]

Ohne Berücksichtigung von Verlusten:

$$Q = E_{el} \quad \Rightarrow \quad I \approx \frac{168'000\,J}{13'800\,Vs} \approx 12.2\,A$$ [1 pt]

Die Sicherung schaltet ab; der Wasserkocher ist an dieser Steckdose nicht einsatzfähig. [1 pt]

Eine entsprechende korrekte Berechnung mit anderen Werten (z.B. $\Delta T = 90$ K oder $U = 220$ V) führt ebenfalls zur vollen Punktzahl.

(b) Zentripetalkraft = Gravitationskraft

$$F_{Zp} = F_G$$

$$m_{Pl} \cdot \omega^2 \cdot r = G \frac{M \cdot m_{Pl}}{r^2}$$ [2 pt]

$$\omega^2 \cdot r^3 = G \cdot M \qquad \text{wobei } \omega = \frac{2\pi}{T}$$ [1 pt]

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot r^3 = G \cdot M$$

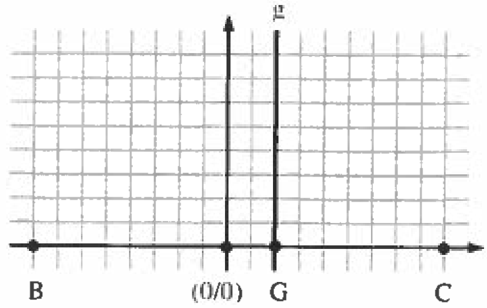
$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{G \cdot M}{4\pi^2}$$ [1 pt]

Aufgabe 5 [3 pt + 4 pt]

In den Punkten B und C befinden sich zwei Schallquellen, die in alle Richtungen unter Normbedingungen ausstrahlen (phasengleich, 688 Hz). Ein Schallempfänger bewegt sich vom Punkt G ausgehend auf der Geraden g nach oben.

(a) Wie viele Male wird er konstruktive Interferenz empfangen?

(b) Bestimmen Sie die Koordinaten seines Standortes, wo zum zweitletzten Mal konstruktive Interferenz auftritt.
(Die asymptotische konstruktive Interferenz bei unendlicher Höhe soll ausser Acht gelassen werden.)



Gitterkonstante: 1 m

Lösung

(a) Wellenlänge $\lambda = \frac{c}{f} = \frac{344\,\text{m/s}}{688\,\text{Hz}} = 0.5\,\text{m}$ [1 pt]

Im Punkt G beträgt der Gangunterschied der zwei Wellen 3 m, was 6λ entspricht.
$\Rightarrow$ In G tritt also konstruktive Interferenz auf. [1 pt]

Je höher der Schallempfänger steigt, desto kleiner wir der Gangunterschied zwischen den zwei Wellen; er wird also konstruktive Interferenz bei einem Gangunterschied von 5λ, 4λ, ..., λ empfangen. Insgesamt detektiert der Empfänger also 6 Mal konstruktive Interferenz. [1 pt]

(b) Ein beliebiger Punkt auf der Geraden g hat die Koordinaten G(2/y)

- Abstand $BG = \sqrt{(10\,\text{m})^2 + y^2}$
- Abstand $CG = \sqrt{(7\,\text{m})^2 + y^2}$ [1 pt]

Die zweitletzte konstruktive Interferenz tritt dort auf, wo BG und CG sich um die doppelte Wellenlänge unterscheiden:

$$2\lambda + CG = BG \qquad \text{[1 pt]}$$

$$1\,\text{m} + \sqrt{(7\,\text{m})^2 + y^2} = \sqrt{(10\,\text{m})^2 + y^2}$$

$$1\,\text{m}^2 + 2\,\text{m} \cdot \sqrt{49\,\text{m}^2 + y^2} + 49\,\text{m}^2 + y^2 = 100\,\text{m}^2 + y^2 \qquad \text{[1 pt]}$$

$$\sqrt{49\,\text{m}^2 + y^2} = 25\,\text{m}$$

$$49\,\text{m}^2 + y^2 = 625\,\text{m}^2$$

$$y^2 = 576\,\text{m}^2$$

$$y = 24\,\text{m} \qquad \text{[1 pt]}$$