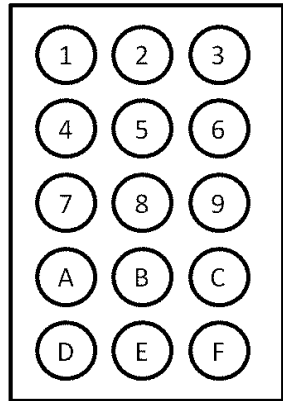


Mathematik II (Geometrie/Statistik)

Aufgabe 1 (5P)

Eine Türe kann durch Eintippen eines 4-stelligen Codes in das nebenstehende Tastenfeld geöffnet werden.



- Wie viele mögliche Codes gibt es total (z.B. A3A4, 1234)? (1P)
- Wie viele Codes gibt es, die aus zwei Zahlen und zwei Buchstaben bestehen (z.B. A4F4)? (1P)
- Wie viele Codes gibt es, wenn aus jeder der fünf Zeilen höchstens eine Taste gedrückt werden darf (z.B. A8F1)? (1P)
- Wie viele Codes gibt es, die aus einem Buchstaben und drei Zahlen mit Quersumme 7 bestehen (z.B. 4D12)? (2P)

Aufgabe 2 (8P)

Gegeben ist eine Ellipse mit den Halbachsen $a = 5$ und $b = 4$ in Hauptlage (Zentrum $(0|0)$, a auf der x -Achse, b auf der y -Achse).

- Wie lautet die Gleichung der Ellipse? (1P)
- Verbinden Sie den Punkt $E(0|5)$ mit dem Punkt $F(-3|0)$ und legen Sie auf diese Verbindungsstrecke die Normale g durch E . Zeigen Sie, dass g eine Tangente der Ellipse ist und berechnen Sie beide Koordinaten des Berührungspunktes B . (4P)
- Die erwähnte Konstruktion für g ergibt mit $E(0|a)$ und $F(-\sqrt{a^2 - b^2} | 0)$ bei beliebigen Halbachsen a und b ($a > b$) eine Ellipsentangente. Beweisen Sie dies! (3P)

Aufgabe 3 (10P)

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(-3|2|-1)$, $B(3|7|-11)$ und $C(-1|-1|-3)$ gegeben.

- Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC bei C rechtwinklig ist und berechnen Sie auch den Winkel α bei A . (2P)
- Wie lautet die Koordinatengleichung der Ebene ABC ? (3P)
- Berechnen Sie das Volumen des Tetraeders $ABCD$ mit $D(-2|1|0)$. (2P)
- Bestimmen Sie die Gleichung der Ebene, die die Gerade AB enthält und senkrecht auf der Ebene ABC steht. (3P)

Aufgabe 4 (6P)

In einer Kiste befinden sich 10 beschriftete Kugeln. Sechs von ihnen tragen die Aufschrift 1 Fr., drei die Aufschrift 2 Fr. und eine die Aufschrift 5 Fr.

- a) Bei einem Spiel zieht man verdeckt zwei Kugeln mit einem Griff und gewinnt das Produkt der Beträge, welche auf den beiden Kugeln notiert sind. Wie gross ist der Erwartungswert und die Standardabweichung für den Gewinn? (3P)
- b) Bei einem anderen Spiel zieht man eine Kugel nach der anderen (ohne Zurücklegen), bis die Summe der Beträge mindestens 3 beträgt. Die Anzahl gezogener Kugeln ist der Gewinn. Wie gross ist der Erwartungswert bei diesem Spiel? (3P)

Aufgabe 5 (5P)

Aus Erfahrung weiss man, dass 10% der Passagiere eines Flugzeugs das vegetarische Menü wählen.

- a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Flugzeug mit 120 Passagieren sich mindestens 11 und höchstens 13 Passagiere für das vegetarische Menü entscheiden? (2P)
- b) Die Flugzeuggesellschaft nimmt 19 vegetarische Menüs an Bord dieses Flugzeugs. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Anzahl nicht ausreicht? (Tipp: Verwenden Sie eine Näherungsrechnung). (3P)

Diese Aufgabenstellung ist mit der Arbeit abzugeben!

Lösungen Mathematik II schriftlich 2016

Die Maximalpunktzahl beträgt 34 Punkte. Die Note N berechnet sich für die Punktzahl p gemäss

$$N = 1 + \frac{5}{28}p$$

wobei auf halbe Noten zu runden ist (Viertelnoten aufrunden). Die Maximalnote ist 6.

1. a) $15^4 = 50625$ 1P

b) $9^2 \cdot 6^2 \cdot \binom{4}{2} = 17496$ 1P

c) $5 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 = 9720$ 1P

d) Es gibt 4 Zahlentypen:

115 (3 Permutationen)

124 (6)

133 (3)

223 (3).

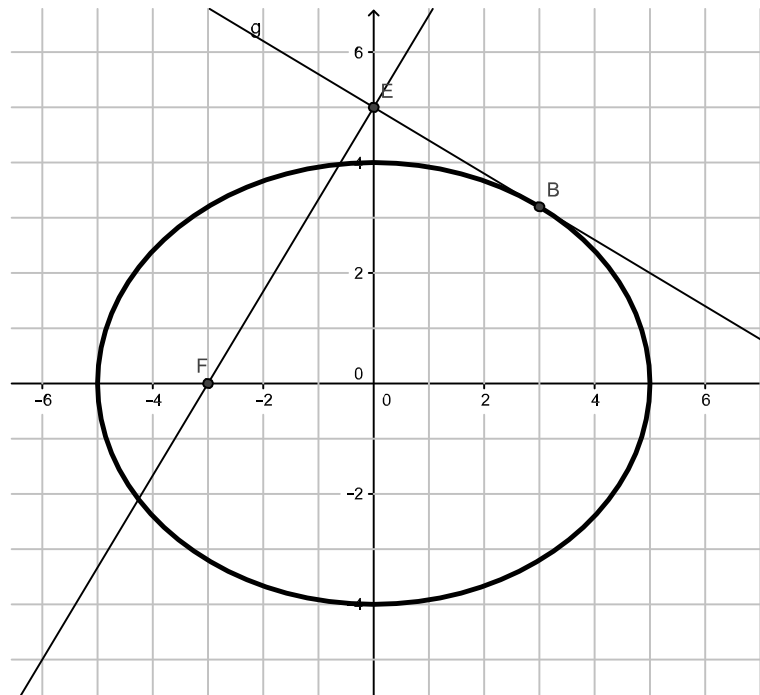
Es gibt 6 Möglichkeiten für den Buchstaben, er kann an 4 Stellen stehen.

Total Möglichkeiten: $6 \cdot 4 \cdot (3 + 6 + 3 + 3) = 360$ 2P

2. a) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ oder $16x^2 + 25y^2 = 400$

1P

b) Wenn nur eine sorgfältige Skizze vorhanden ist, kann ein Punkt gegeben werden.



$F(-3|0), E(0|5), m_1 = \frac{5}{3}, m_g = -\frac{3}{5}, g: y = -\frac{3}{5}x + 5$

1P

$g \cap \text{Ellipse} : 16x^2 + 25 \left(-\frac{3}{5}x + 5 \right)^2 = 400$

$16x^2 + 9x^2 - 150x + 625 = 400, \quad 25x^2 - 150x + 225 = 0, \quad x^2 - 6x + 9 = 0$

$(x - 3)^2 = 0$, eine Lösung, also Tangente

2P

Berührungspunkt $B(3|3.2)$

1P

c) $F(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0), m_1 = \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}}, m_g = -\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}, g: y = -\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}x + a$

1P

$g \cap \text{Ellipse} : b^2x^2 + (a^2 - b^2)x^2 - 2a^2\sqrt{a^2 - b^2}x + a^4 = a^2b^2$

$a^2(x^2 - 2\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}x + a^2 - b^2) = 0$

$\left(x - \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \right)^2 = 0$, eine Lösung! q.e.d.

2P

3. a) $\vec{CA} = \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{CB} = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\vec{CA} \cdot \vec{CB} = 0$ 1P

$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix}$, $\vec{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{161}} \approx 0.3249$, $\alpha \approx 71.04^\circ$ 1P

b) $\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} -40 \\ -8 \\ -28 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \vec{n}$

Punkt einsetzen $\Rightarrow E: 10x + 2y + 7z + 33 = 0$ 3P

c) $\vec{AD} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & -1 \\ -10 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 10$

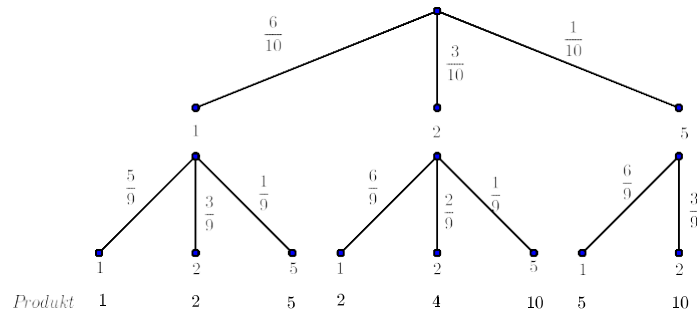
(oder mit Spatprodukt: $(\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot \vec{AD} = 60$, $V = \frac{60}{6} = 10$) 2P

d) Ebene wird aufgespannt durch \vec{AB} und \vec{n} .

$\vec{n} \times \vec{AB} = \begin{pmatrix} -55 \\ 142 \\ 38 \end{pmatrix}$, $D: -55x + 142y + 38z + D = 0$

$A \in D: -55x + 142y + 38z - 411 = 0$ 3P

4. a)



Verteilung:

x	1	2	4	5	10
$q(x)$	$\frac{1}{90}$	$\frac{2}{90}$	$\frac{4}{90}$	$\frac{5}{90}$	$\frac{10}{90}$

$$E(\mathbf{X}) = \frac{1}{90}(30 + 72 + 24 + 60 + 60) = \frac{246}{90} = \frac{41}{15} \approx 2.73$$

2P

$$V(\mathbf{X}) = \frac{1}{90}(30 + 144 + 96 + 300 + 600) - (E(\mathbf{X}))^2 = 13 - \left(\frac{41}{15}\right)^2 = \frac{1244}{225}$$

$$\sigma = \sqrt{V(\mathbf{X})} \approx 2.35$$

1P

b) Tabelle:

Zug	WK	Anz
5	$\frac{10}{3} \cdot \frac{1}{9}$	1
25	$\frac{10}{3} \cdot \frac{2}{9}$	2
22	$\frac{10}{3} \cdot \frac{6}{9}$	2
21	$\frac{10}{6} \cdot \frac{9}{9}$	2
15	$\frac{10}{6} \cdot \frac{1}{9}$	2
12	$\frac{10}{6} \cdot \frac{5}{9}$	2
115	$\frac{10}{6} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{8}$	3
112	$\frac{10}{6} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{3}{8}$	3
111	$\frac{10}{6} \cdot \frac{9}{9} \cdot \frac{8}{8}$	3

Verteilung:

x	1	2	3
$q(x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{3}{30}$

$$E(\mathbf{X}) = \frac{67}{30} \approx 2.23$$

3P

5. a) $p = \frac{1}{10}, \quad q = \frac{9}{10}$

$$P(11 \leq X \leq 13) = \binom{120}{11} p^{11} q^{109} + \binom{120}{12} p^{12} q^{108} + \binom{120}{13} p^{13} q^{107} \approx 0.3513$$

2P

b) $\mu = np = 12, \quad \sigma = \sqrt{npq} \approx 3.29$

$$P(20 \leq X \leq 120) = 1 - \Phi\left(\frac{20 - \mu - 0.5}{\sigma}\right) = 1 - \Phi(2.28) =$$

$$= 1 - 0.98870 = 1.13\%$$

3P