ETH-Aufnahmeprüfung Herbst 2015

Mathematik II (Geometrie/Statistik)

Aufgabe 1

Gegeben ist der Kreis mit Mittelpunkt $M(-5|-2)$ und Radius $r = \sqrt{85}$.

a) Bestimmen Sie die Gleichung des Kreises in der Form $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ und zeigen Sie, dass der Punkte $A(-3|7)$ auf dem Kreis liegt. 2P

b) Wie lautet die Gleichung der Tangente im Punkte A? 2P

c) Spiegelt man den Punkt A an der Geraden durch M und $P(7|1)$, erhält man den Punkt B. Bestimmen Sie die Koordinaten von B und den Winkel AMB. 4P

Aufgabe 2

In einer Urne liegen x rote, 7 blaue und 8 grüne Kugeln. A sei das Ereignis, in zwei Zügen ohne Zurücklegen zwei rote Kugeln zu ziehen. B sei das Ereignis, in zwei Zügen ohne Zurücklegen zwei blaue Kugeln zu ziehen.

a) Die Wahrscheinlichkeit von B sei um $11/190$ grösser als die Wahrscheinlichkeit von A. Berechnen Sie daraus die Zahl x der roten Kugeln! 3P

<u>Hinweis:</u> Falls Sie bei a) kein ganzzahliges x finden, verwenden Sie für die Aufgaben b) und c) den Wert $x = 10$.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, bei zwei Zügen ohne Zurücklegen zwei verschiedenfarbige Kugeln zu ziehen. 2P

c) Man zieht wiederum zwei Mal ohne Zurücklegen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die 1. Kugel nicht rot ist, wenn man weiss, dass die beiden Kugeln verschiedenfarbig sind? 3P

Aufgabe 3

Von einer geraden quadratischen Pyramide mit der Grundfläche $ABCD$ in der xy-Ebene und der Spitze S kennt man die Punkte $A(8/2/0)$, $B(16/8/0)$, $C(10/16/0)$ und $S(9/9/9)$.

a) Berechnen Sie die Koordinaten des vierten Eckpunktes D der Grundfläche. 1P

b) Zeigen Sie, dass die 5 Punkte tatsächlich eine gerade quadratische Pyramide darstellen. 3P

c) Zur Verstärkung der Pyramide wird vom Punkt A aus eine Strebe der Länge 12 zu einem Punkt Q auf der gegenüberliegenden Seitenkante CS montiert. Berechnen Sie die Koordinaten dieses Punktes Q (auf zwei Nachkommastellen). 4P

Aufgabe 4

Ein Spielwürfel ist so gefälscht, dass die geraden Augenzahlen je mit einer doppelt so grossen Wahrscheinlichkeit erscheinen wie die ungeraden Augenzahlen.

a) Der Würfel wird einmal geworfen. Berechnen Sie Erwartungswert und Standardabweichung der geworfenen Augenzahl? 3P

b) Wie oft muss man den gefälschten Würfel mindestens werfen, damit die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine gerade Zahl zu werfen, mehr als 99.99% beträgt? 2P

c) Der gefälschte Würfel wird zweimal geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die geworfene Augensumme mindestens neun? 3P

Aufgabe 5

Gegeben sind die Ebene $\mathbb{E} : 2x - 2y - z - 12 = 0$ und die Gerade $g : P(15|16|13)Q(10|11|8)$.

a) In welchem Punkt schneidet die Gerade g die Ebene $\mathbb{E}$? 3P

b) Ein von P aus gehender Lichtstrahl geht durch Q und wird anschliessend an der Ebene $\mathbb{E}$ reflektiert. Wo trifft der reflektierte Strahl auf die Ebene $z = -56$? 5P

Diese Aufgabenstellung ist mit der Arbeit abzugeben!

Lösungen Mathematik II schriftlich 2015

Für jede Aufgabe werden 8 Punkte erteilt, sodass ein Total von 40 Punkten erreicht werden kann. Die Note N berechnet sich für die Punktzahl p gemäss

$N = 1 + \frac{p}{\mathbf{7}}$,

wobei auf halbe Noten zu runden ist (Viertelnoten aufrunden). Die Maximalnote ist 6.

---

1. a) Gleichung: $(x+5)^2 + (y+2)^2 = 85 \quad \Longrightarrow \quad x^2 + y^2 + 10x + 4y - 56 = 0$

   Die Koordinaten von A erfüllt diese Gleichung: $9 + 49 - 30 + 28 - 56 = 0$. 2P

   b) Verschiedene Möglichkeiten, z.B. mit Hilfe der Steigungen:

   $m_{MA} = \frac{9}{2} \quad \Longrightarrow \quad m_t = -\frac{2}{9} \quad \Longrightarrow \quad t: \quad y = -\frac{2}{9}x + b, A \in t \quad \Longrightarrow$

   $y = -\frac{2}{9}x + \frac{57}{9}$ bzw. $2x + 9y - 57 = 0$ 2P

   c) Schneiden der Geraden g_{AB} mit dem Kreis:

   $m_{MP} = \frac{1}{4} \quad \Longrightarrow \quad g_{AB}: \quad y = -4x - 5$

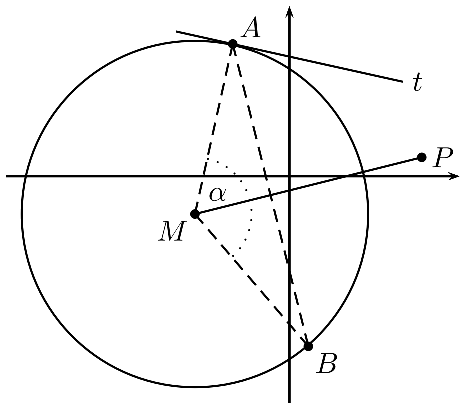
   Einsetzen dieser Gleichung in die Kreisgleichung ergibt:

   $17x^2 + 34x - 51 = 0$ bzw. $x^2 + 2x - 3 = 0$

   Interessante Lösung $x = 1 \quad \Longrightarrow \quad B(1|-9)$

   Winkel z.B. mit Skalarprodukt:

   $\angle(AMB) = 2 \cdot \arccos \frac{\overrightarrow{MA}\overrightarrow{MP}}{|\overrightarrow{MA}||\overrightarrow{MP}|} = 2 \cdot \arccos \frac{85}{\sqrt{85}\sqrt{425}} = 126.87°$ 4P



2. a) Total gibt es x+15 Kugeln.

$$P(A) = \frac{x}{x+15} \cdot \frac{x-1}{15+x-1} = \frac{x(x-1)}{(15+x)(14+x)}$$

$$P(B) = \frac{7}{x+15} \cdot \frac{6}{15+x-1} = \frac{42}{(15+x)(14+x)}$$

$$P(A) + \frac{11}{190} = P(B) \qquad \Longrightarrow \qquad 201x^2 + 129x - 5670 = 0$$

Die einzige sinnvolle Lösung ist $\underline{\underline{x_1 = 5}}$. 3P

b) Mit Gegenwahrscheinlichkeit: $p = 1 - \frac{5}{20} \cdot \frac{4}{19} - \frac{7}{20} \cdot \frac{6}{19} - \frac{8}{20} \cdot \frac{7}{19} = \frac{131}{190} = \underline{\underline{0.69}}$

Für $x = 10$: $\quad p = 1 - \frac{10}{25} \cdot \frac{9}{24} - \frac{7}{25} \cdot \frac{6}{24} - \frac{8}{25} \cdot \frac{7}{24} = \frac{103}{150} = \underline{\underline{0.69}}$ 2P

c) Bedingte Wahrscheinlichkeit:

$$P(1.\text{ nicht rot} \mid \text{verschiedenfarbig}) = \frac{p(\text{blau-rot, blau-grün, grün-blau, grün-rot})}{p(\text{verschiedenfarbig})} =$$

$$\frac{\frac{7}{20} \cdot \frac{5}{19} + \frac{7}{20} \cdot \frac{8}{19} + \frac{8}{20} \cdot \frac{7}{19} + \frac{8}{20} \cdot \frac{5}{19}}{\frac{131}{190}} = \frac{187}{262} = \underline{\underline{0.71}}$$

Für $x = 10$: $\quad P = \frac{\frac{7}{25} \cdot \frac{10}{24} + \frac{7}{25} \cdot \frac{8}{24} + \frac{8}{25} \cdot \frac{7}{24} + \frac{8}{25} \cdot \frac{10}{24}}{\frac{103}{150}} = \frac{131}{206} = \underline{\underline{0.64}}$ 3P

3. a) $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \underline{\underline{D = (2/10/0)}}$ 1P

b) $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = 10$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \implies \angle(ABC) = 90^\circ$$

S liegt über dem Mittelpunkt $M(9|9|0)$ von AC 3P

c) $(SC): \quad \vec{r} = \overrightarrow{OS} + \lambda\overrightarrow{SC} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -9 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 9+\lambda \\ 9+7\lambda \\ 9-9\lambda \end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{AQ}| = \left| \begin{pmatrix} 1+\lambda \\ 7+7\lambda \\ 9-9\lambda \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1 + 2\lambda + \lambda^2 + 49 + 98\lambda + 49\lambda^2 + 81 - 162\lambda + 81\lambda^2} = 12$$

$$131\lambda^2 - 62\lambda + 131 = 144$$

$$131\lambda^2 - 62\lambda - 13 = 0$$

$$\lambda_1 \approx 0.63, \quad \lambda_2 \approx -0.16$$

$\underline{\underline{Q_1 = (9.63/13.41/3.32)}}$

$Q_2 = (8.84/7.9/10.42)$ liegt nicht auf der Strecke SC 4P

4. a) Verteilung:

x	1	2	3	4	5	6
$p(x)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$

$$\mu = E(X) = \sum x \cdot p(x) = \underline{\underline{\frac{11}{3}}}$$

$$V(X) = \sum x^2 \cdot p(x) - \mu^2 = \frac{26}{9} \quad \Longrightarrow \quad \sigma = \underline{\underline{\frac{\sqrt{26}}{3} = 1.70}}$$ 3P

b) $P(\text{mindestens eine gerade Zahl}) = 1 - P(\text{alle ungerade}) = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$

$$1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n > 0.9999$$

$$n > \frac{\ln(0.0001}{\ln(1/3)} = 8.38 \quad \Longrightarrow \quad \underline{\underline{n = 9}}$$ 2P

c) $P(X = 9) = P((3,6),(4,5),(5,4),6,3)) = \frac{2+2+2+2}{81} = \frac{8}{81}$

$$P(X = 10) = P((4,6),(5,5),(6,4)) = \frac{4+1+4}{81} = \frac{9}{81}$$

$$P(X = 11) = P((5,6),(6,5)) = \frac{2+2}{81} = \frac{4}{81}$$

$$P(X = 12) = P((6,6)) = \frac{4}{81}$$

$$P(X >= 9) = \frac{8+9+4+4}{81} = \underline{\underline{\frac{25}{81}}}$$ 3P

5. a) $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 15 \\ 16 \\ 13 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 16 \\ 13 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\text{g}\cap\mathbb{E}: 2(15-\mu) - 2(16-\mu) - (13-\mu) - 12 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mu = 27 \quad \Longrightarrow \quad \underline{\underline{D(-12|-11|-14)}}$ 3P

b) Idee: F=Fusspunkt von P auf die Ebene $\mathbb{E}$. P an F spiegeln ergibt R. Die Gerade $g(RD)$ entspricht dem gespiegelten Strahl.

$n: \vec{r} = \begin{pmatrix} 15 \\ 16 \\ 13 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$F = n \cap \mathbb{E}: 2(15+2\lambda) - 2(16-2\lambda) - (13-\lambda) - 12 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = 3 \quad \Longrightarrow \quad F(21|10|10)$

$\Longrightarrow \quad R(27|4|7), g(RD): \vec{r} = \begin{pmatrix} 27 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -39 \\ -15 \\ -21 \end{pmatrix}$

$g(RD) \cap z = -56: \lambda = 3 \quad \Longrightarrow \quad \underline{\underline{S(-90|-41|-56)}}$ 5P