

Schriftliche Aufnahmeprüfungen Herbst 2014

MATHEMATIK II (Geometrie und Statistik)

Kandidaten-Nummer:

NAME:

Vorname:

Die Resultate müssen den vollständigen Lösungsweg und alle Zwischenresultate enthalten.
Beschluss der Aufnahmeprüfungskommission vom 15.9.2000

1. Gegeben ist das in der xy -Ebene liegende Dreieck $A(12|0)B(-15|-9)C(20|-16)$.
 - a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Höhenschnittpunktes H des Dreiecks ABC . 4P
 - b) Weisen Sie nach, dass die vier Punkte A, B, C, H auf einer Hyperbel in Normallage liegen. (Normallage: Die Brennpunkte liegen auf der x -Achse symmetrisch zum Ursprung) 3P
 - c) Sei K der zu H bezüglich des Koordinatenursprungs symmetrische Punkt. Zeigen Sie, dass K auf dem Umkreis des Dreiecks ABC liegt. 3P

2. Ein Kreuzfahrtschiff hat drei Decks mit je 24 Kabinen. Auf jedem Deck findet man zwei gegenüberliegende Kabinenreihen mit je 12 Kabinen.
 - a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, 6 nebeneinander (in einer Reihe) liegende Kabinen zu buchen? 2P
 - b) Vier Kabinen werden zufällig gewählt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle 4 auf demselben Deck liegen? 2P
 - c) Es müssen Kabinen für k Männer und k Frauen reserviert werden ($k \leq 24$). Auf wie viele Arten kann man dies tun, ohne dass ein 'gemischtes' Deck entsteht (d.h. ohne dass auf einem Deck Männer- und Frauenkabinen reserviert werden)? 3P
 - d) Von den 72 Passagieren sind 18 seekrank. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass von 3 zufällig ausgewählten Passagieren genau einer oder zwei seekrank sind? 3P

3. Gegeben sind die 3 Raumpunkte $P(-1|1|0)$ $Q(1|3|0)$ $R(2 + \sqrt{2} | 2 + \sqrt{2} | \sqrt{2})$, welche die Ebene E festlegen.
- a) Zeigen Sie, dass das Dreieck PQR gleichschenkelig ist und der Winkel bei Q 135° beträgt. 2P
- b) Berechnen Sie von der Ebene E den Einheitsnormalenvektor \vec{n}_e mit positiver z -Komponente. 3P
- c) Wegen a) können die drei Punkte P, Q, R zu einem regulären Achteck $PQRSTU VW$ ergänzt werden. Bestimmen Sie (z.B. unter Verwendung von \vec{n}_e) die Koordinaten des Punktes S . 3P
- d) Welchen Flächeninhalt besitzt das Achteck $PQRSTU VW$? 2P
4. Ein Käfer läuft auf der Zahlengeraden von einer ganzen Zahl zur benachbarten ganzen Zahl, wofür er immer eine Minute benötigt. Er startet zur Zeit 0 auf der Zahl 0 und läuft mit der immer gleichen Wahrscheinlichkeit von $p = \frac{1}{4}$ zur nächst grösseren Zahl bzw. mit Wahrscheinlichkeit $q = \frac{3}{4}$ zur nächst kleineren Zahl.
- a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist der Käfer nach 5 Minuten auf der Zahl -3? 2P
- b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist der Käfer nach 9 Minuten auf einer Zahl grösser gleich 6? 3P
- c) Sei X die Entfernung des Käfers von Position 0 nach 3 Minuten. Berechnen Sie den Erwartungswert $E(X)$ und die Varianz $V(X)$. 5P

Diese Aufgabenstellung ist mit der Arbeit abzugeben!

Lösungen Mathematik II schriftlich 2014

Für jede Aufgabe werden 10 Punkte erteilt, sodass ein Total von 40 Punkten erreicht werden kann. Die Note N berechnet sich für die Punktzahl p gemäss

$$N = 1 + \frac{p}{8},$$

wobei auf halbe Noten zu runden ist (Viertelnoten aufrunden).

1. a) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} -27 \\ -9 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{AC} = \begin{pmatrix} 8 \\ -16 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$h_c: y = -3x + 44, \quad h_b: y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$

$$H(13|5)$$

4P

b) $hyp: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$A \in hyp \implies a = 12, \quad B \in hyp \implies b = 12$$

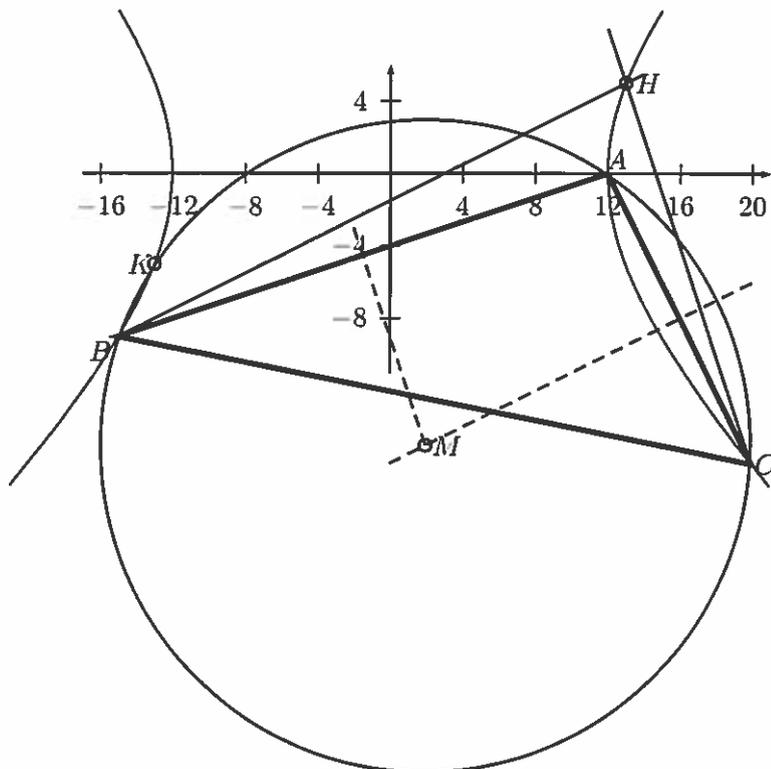
$$hyp: x^2 - y^2 = 144, \quad \text{Prüfen: } C \in hyp\checkmark, H \in hyp\checkmark$$

3P

c) $K(-13|-5), M_{AB}(-1.5|-4.5), M_{AC}(16|-8), m_{AB}: y = -3x-9, m_{AC}: y = \frac{1}{2}x-16$

$$\implies M(2|-15), \quad r = |MA| = \sqrt{325}, \quad |KM|^2 = (-13-2)^2 + (-5+15)^2 = 325\checkmark$$

3P



2. a) $7 \cdot 2 \cdot 3 = 42$

2P

b) $\frac{23 \cdot 22 \cdot 21}{71 \cdot 70 \cdot 69} = \frac{11}{355}$

2P

c) Männer auf 2 Decks verteilen, Frauen auf ein Deck bzw. umgekehrt:

$$2 \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{48}{k} \cdot \binom{24}{k}$$

Männer auf 1 Deck, Frauen auf 1 Deck:

$$3 \cdot \binom{24}{k} \cdot 2 \cdot \binom{24}{k}$$

$$\text{Total: } 6 \cdot \binom{24}{k} [\binom{48}{k} - \binom{24}{k}]$$

3P

d) Ein Seekranker: $3 \cdot \frac{18 \cdot 54 \cdot 53}{72 \cdot 71 \cdot 70}$

$$\text{Zwei Seekranke: } 3 \cdot \frac{18 \cdot 17 \cdot 54}{72 \cdot 71 \cdot 70}$$

$$\text{Total: } \frac{3 \cdot 18 \cdot 54 \cdot (53 + 17)}{72 \cdot 71 \cdot 70} = \frac{81}{142}$$

3P

$$3. \quad a) \quad \overline{PQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{QR} = \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} \\ -1 + \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$|\overline{PQ}| = \sqrt{8} = |\overline{QR}|$$

$$\cos\varphi = \frac{\overline{QP} \cdot \overline{QR}}{8} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = 135^\circ$$

2P

$$b) \quad \vec{n} = \overline{PQ} \times \overline{QR} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{n}| = 4\sqrt{2} \Rightarrow \vec{n}_e = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

3P

$$c) \quad \overline{RS} = \overline{PQ} \times \vec{n}_e = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overline{OS} = \overline{OR} + \overline{RS} \Rightarrow S(2 + 2\sqrt{2}|2|2 + \sqrt{2})$$

3P

d) Fläche_{Achteck} = 4 · Fläche_{PQR} + Fläche_{Quadrat mit Seite PR}

$$\text{Fläche}_{\text{Achteck}} = 4 \cdot \frac{|\vec{n}|}{2} + \left| \begin{pmatrix} 3 + \sqrt{2} \\ 1 + \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \right|^2 = 8 \cdot \sqrt{2} + 16 + 8\sqrt{2} = 16(1 + \sqrt{2})$$

2P

Für c) und d) gibt es folgenden alternativen Lösungsweg, für welchen natürlich auch die entsprechenden Punkte erteilt werden:

Reguläres Achteck mit Seite $s = \sqrt{8}$ erzeugen durch Abecke eines Quadrates mit Seite $2 + s + 2$.
Dann folgt:

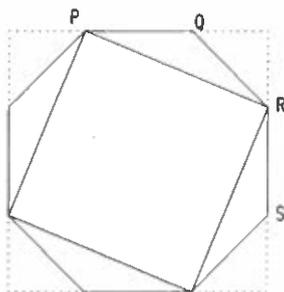
$$\overline{OS} = \overline{OP} + (1 + \sqrt{2}) \cdot \overline{QR}$$

Also wiederum

$$S = (2 + 2\sqrt{2}|2|2 + \sqrt{2})$$

Mit obigem Lösungsweg berechnet sich die Fläche A sehr einfach:

$$A = (4 + \sqrt{8})^2 - 2 \cdot (2 \cdot 2) = 16(1 + \sqrt{2})$$



4. a) Der Käfer macht einen Schritt in positiver Richtung und 4 Schritte in negativer Richtung:

$$\binom{5}{1} \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{405}{1024} \quad 2P$$

b) Es sind die Zahlen 9 (9 Mal positiv) und 7 (8 Mal positiv, 1 Mal negativ) erreichbar:

$$\binom{1}{4}^9 + \binom{9}{1} \frac{3}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^8 = \frac{28}{4^9} = \frac{7}{65536} \quad 3P$$

c)

Position	3	1	-1	-3
Entfernung	3	1	1	3
Wk	$\left(\frac{1}{4}\right)^3$	$3\left(\frac{1}{4}\right)^2 \frac{3}{4}$	$3\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^2$	$\left(\frac{3}{4}\right)^3$

Entfernung	1	3
Wk	$\frac{9}{16}$	$\frac{7}{16}$

$$E(X) = \frac{9}{16} + 3 \cdot \frac{7}{16} = \frac{15}{8} \quad 3P$$

$$V(X) = \frac{9}{16} + 9 \cdot \frac{7}{16} - \left(\frac{15}{8}\right)^2 = \frac{63}{64} \quad 2P$$