ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Rektorat/Zulassungsstelle

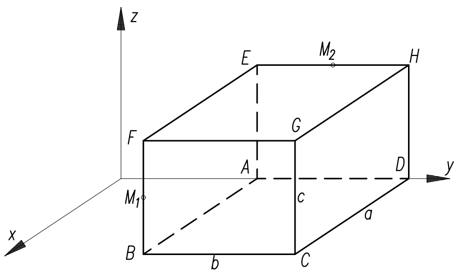
Schriftliche Aufnahmeprüfungen **Herbst 2012**

MATHEMATIK II (Geometrie und Statistik)

Kandidaten-Nummer:	....
NAME:	....
Vorname:	....

Die Resultate müssen den **vollständigen Lösungsweg** und **alle Zwischenresultate** enthalten.
Beschluss der Aufnahmeprüfungskommission vom 15.9.2000

1. Im nebenstehenden Quader $ABCDEFGH$ kennt man den Punkt $A(0|8|0)$ sowie die Kantenlängen $a = b = 6$, c=4. M_1 und M_2 bezeichnen Kantenmittelpunkte.



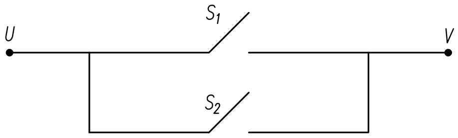
   a) Bestimmen Sie die Gleichung der Ebene $\mathbb{E}$, welche durch die Punkte C, M_1 und M_2 bestimmt ist. (3P)

   b) Wo schneidet die Raumdiagonale AG diese Ebene? (3P)

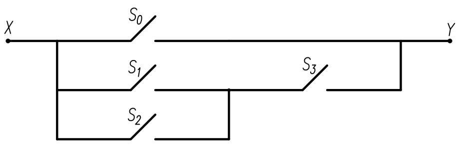
   c) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes F von der Ebene $\mathbb{E}$. (2P)

   d) Berechnen Sie das Volumen des Tetraeders M_1M_2CF. (2P)

2. a) Im nebenstehenden kleinen Schaltkreis sind die beiden Schalter S_1 und S_2 mit den Wahrscheinlichkeiten $P(S_1) = \frac{1}{2}$ bzw. $P(S_2) = \frac{1}{3}$ geschlossen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit P_{UV}, dass Strom von U nach V fliessen kann. (2P)



   b) Im nebenstehenden grossen Schaltkreis kennt man zusätzlich $P(S_0) = \frac{1}{4}$ und $P(S_3) = \frac{1}{5}$. Berechnen Sie nun die Wahrscheinlichkeit P_{XY}, dass Strom von X nach Y fliessen kann. (4P)



   c) Bei unbekannten $p_0 = P(S_0)$ und $p_3 = P(S_3)$ sei nur $P_{XY} = \frac{1}{3}$ bekannt. Welche Beziehung besteht dann zwischen p_0 und p_3 und welche Werte können p_0 und p_3 tatsächlich annehmen? (4P)

3. Ein gerader Kreiskegel mit Spitze $S(0|0|10)$, Grundkreismittelpunkt $M(0|0|0)$ und Grundkreisradius $r = 3\sqrt{2}$ wird von der Ebene $\mathbb{E} : x + y + 3z - 12 = 0$ geschnitten. Die entstehende Schnittellipse wird mit ε bezeichnet.

   a) Skizzieren Sie die Situation sorgfältig in einem Schrägbild; markieren Sie insbesondere die ungefähre Lage des Mittelpunktes M der Ellipse ε. (4P)

   b) Berechnen Sie die Länge der grossen Achse der Ellipse ε. (6P)

Seite 2→

4. Wirft man eine Münze, so kommt sie auf Kopf(K) oder Zahl(Z) zu liegen. Man wirft nun eine Münze vier Mal und zählt die Anzahl Wechsel X von einem Wurf zum nächsten (z.B. $X(KZZK) = 2$, $X(KZZZ) = 1$).

   a) Berechnen Sie die Verteilung, den Erwartungwert und die Streuung von X, falls man eine "normale" Münze wirft (d.h. eine Münze mit $p = P(K) = \frac{1}{2}$). (6P)

   b) Berechnen Sie den Erwartungswert $E(X)$ allgemein für eine Münze mit $P(K) = p$. (4P)

Dieses Aufgabenblatt ist mit der Arbeit abzugeben!

Lösungen Mathematik II schriftlich 2012

Für jede Aufgabe werden 10 Punkte erteilt, sodass ein Total von 40 Punkten erreicht werden kann. Die Note N berechnet sich für die Punktzahl p gemäss

$N = 1 + \frac{p}{8}$,

wobei auf halbe Noten zu runden ist (Viertelnoten aufrunden).

---

1. a) $M_1(6|8|2)$, $M_2(0|11|4)$, $C(6|14|0)$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{M_1C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1C} = \begin{pmatrix} -18 \\ -12 \\ -36 \end{pmatrix} || \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{E} : 3x + 2y + 6z - 46 = 0$ 3P

b) $g : \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$

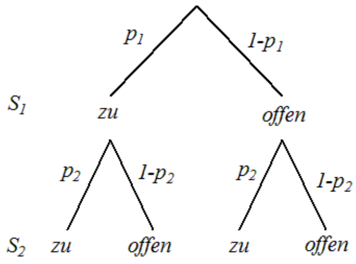
$g \cap \mathbb{E} : 3(6\lambda) + 2(8 + 6\lambda) + 6(4\lambda) - 46 = 0, \quad 54\lambda = 30, \quad \lambda = \frac{5}{9}$

$S\left(\frac{10}{3}\middle|\frac{34}{3}\middle|\frac{20}{9}\right)$ 3P

c) $HNF : \frac{3x + 2y + 6z - 46}{7} = 0, \quad d(F, \mathbb{E}) = \frac{18 + 16 + 24 - 46}{7} = \frac{12}{7}$ 2P

d) $V = [\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1C}, \overrightarrow{M_1F}] = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}|-72| = 12$ 2P

2. a) Mit Hilfe des Baumes



findet man $P_{UV} = 1 - (1-p_1)(1-p_2) = \dfrac{2}{3}$ 2P

b) S_1 und S_2 lassen sich durch einen Schalter S_4 mit $p(S_4) = \dfrac{2}{3}$ ersetzen.

S_4 und S_3 lassen sich durch einen Schalter S_5 mit $p(S_5) = \dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{15}$ ersetzen.

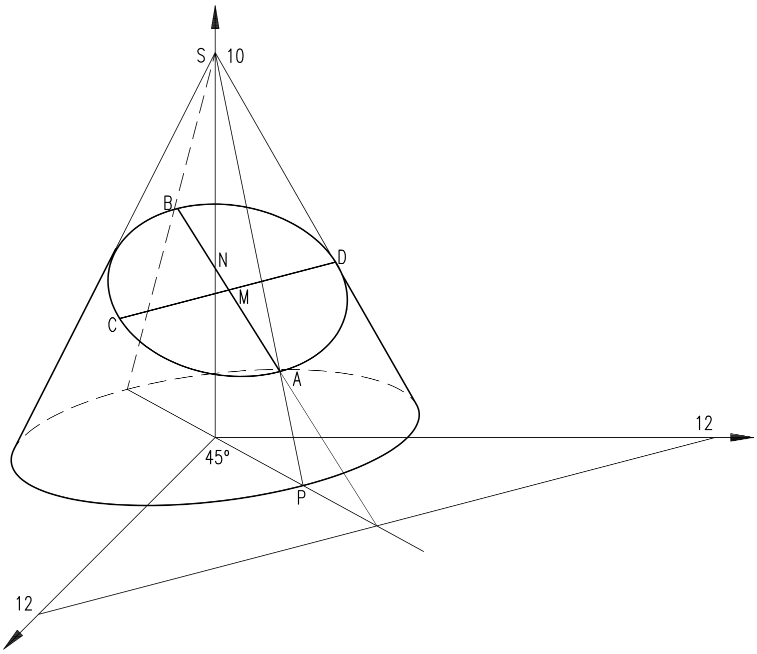
$P_{XY} = 1 - \left(1 - \dfrac{2}{15}\right)\left(1 - \dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{7}{20}$ 4P

c) $P_{XY} = 1 - (1-p_5)(1-p_0) = 1 - \left(1 - \dfrac{2}{3}p_3\right)(1-p_0) = p_0 + \dfrac{2}{3}p_3 - \dfrac{2}{3}p_0p_3$

$P_{XY} = \dfrac{1}{3} \Longrightarrow 3p_0 + 2p_3 - 2p_0p_3 = 1$ bzw. $p_3 = \dfrac{1-3p_0}{2-2p_0}$

$0 \leq p_0, p_3 \leq 1 \Longleftrightarrow p_0 \in \left[0, \dfrac{1}{3}\right], p_3 \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ 4P

3. a)



4P

(Mittelpunkt auf Achse: Abzug 2P)

b) $P(r\sin 45°|r\cos 45°|0) = (3|3|0), \quad g_{SP}: \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}$

$g_{SP} \cap \mathbb{E}: 3\lambda + 3\lambda + 30 - 30\lambda - 12 = 0, \quad \lambda = \frac{3}{4} \Longrightarrow A\left(\frac{9}{4}\middle|\frac{9}{4}\middle|\frac{5}{2}\right)$ 2P

$Q(r\sin 215°|r\cos 215°|0) = (-3|-3|0), \quad g_{Sq}: \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -10 \end{pmatrix}$

$g_{SQ} \cap \mathbb{E}: -3\lambda - 3\lambda + 30 - 30\lambda - 12 = 0, \quad \lambda = \frac{1}{2} \Longrightarrow B\left(-\frac{3}{2}\middle|-\frac{3}{2}\middle|5\right)$ 2P

$|AB| = \frac{5}{4}\sqrt{22} \approx 5.86$ 2P

4. a) Mit Hilfe der Tabelle

Ergebnis	Anzahl Wechsel	Wk bei $P(K) = p, q = 1 - p$
KKKK	0	p^4
KKKZ	1	p^3q
KKZK	2	p^3q
KKZZ	1	p^2q^2
KZKK	2	p^3q
KZKZ	3	p^2q^2
KZZK	2	p^2q^2
KZZZ	1	pq^3
ZKKK	1	pq^3
ZKKZ	2	p^2q^2
ZKZK	3	p^2q^2
ZKZZ	2	pq^3
ZZKK	1	p^2q^2
ZZKZ	2	pq^3
ZZZK	1	pq^3
ZZZZ	0	q^4

findet man für $p = \frac{1}{2}$ die Verteilung

x	0	1	2	3
$q(x)$	$\frac{2}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{2}{16}$

3P

und daraus

$$E(X) = \frac{0 \cdot 2 + 1 \cdot 6 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 2}{16} = \frac{3}{2}$$

$$V(X) = \frac{0^2 \cdot 2 + 1^2 \cdot 6 + 2^2 \cdot 6 + 3^2 \cdot 2}{16} - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}, \quad \sigma = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

3P

b) Für beliebiges p ergibt sich die Verteilung

x	0	1	2	3
$q(x)$	$p^4 + q^4$	$2(p^2q^2 + p^3q + pq^3)$	$2(p^2q^2 + p^3q + pq^3)$	$2p^2q^2$

$$\Longrightarrow E(X) = 6(p^2q^2 + p^3q + pq^3) + 6p^2q^2 = 6pq(p+q)^2 = 6pq = 6p(1-p)$$

4P

Dr. Bernhard Ruh
Lindenweg 19
4528 Zuchwil
Tel: 032 685 57 85
E-mail: bruh@bluewin.ch