ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Rektorat/Zulassungsstelle

Schriftliche Aufnahmeprüfungen **Herbst 2011**

MATHEMATIK II (Geometrie und Statistik)

Kandidaten-Nummer: ....

NAME: ....

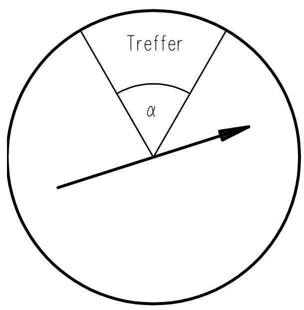
Vorname: ....

Die Resultate müssen den **vollständigen Lösungsweg** und **alle Zwischenresultate** enthalten.
Beschluss der Aufnahmeprüfungskommission vom 15.9.2000

1. Bestimmen Sie in der $xy-$Ebene exakt den Mittelpunkt $M(x_M|y_M)$ und den Radius jenes Kreises, welcher durch den Koordinatenursprung $O(0|0)$ verläuft und die Gerade $g:\ y = \frac{2}{3}x+2$ im Punkte $B(3|4)$ berührt.
   Kontrollieren Sie die Rechnung mittels Konstruktion mit Einheit 1 cm.

2. Im Raum sind die Gerade $g : P(1|5|-1)Q(5|3|3)$ und der Punkt $A(-1|0|3)$ gegeben.
   a) Finden Sie die Punkte B und C auf g sowie den Punkt D so, dass das Viereck $ABCD$ ein Quadrat ist. Beachten Sie, dass B und C Nachbarpunkte sind. Von den zwei Möglichkeiten für C wählen Sie jene mit lauter positiven Koordinaten.
   b) Bestimmen Sie die Spitze S (wiederum mit lauter positiven Koordinaten) einer geraden quadratischen Pyramide mit Grundfläche $ABCD$ und Volumen 72.

3. Nebenstehendes Glücksrad wird 5 Mal gedreht.
   a) Es sei $\alpha = 60°$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, genau einen Treffer zu erzielen.
   b) Berechnen Sie (wiederum für $\alpha = 60°$) die Wahrscheinlichkeit, mindestens 2 Treffer zu erzielen.
   c) Es sei A das Ereignis, 1 oder 4 Treffer zu erzielen, und B das Ereignis, 2 oder 3 Treffer zu erzielen. Wie gross muss man dann den Winkel $0 < \alpha < 360°$ wählen, damit $P(A) = P(B)$ wird. Wie gross ist dann diese Wahrscheinlichkeit?



4. Aus einem Stapel mit 3 schwarzen und 4 roten Karten wird solange ohne Zurücklegen zufällig eine Karte gezogen bis eine rote Karte erscheint. Dann wird der Gewinn ausbezahlt: Mit X gezogenen Karten werden X Franken gewonnen.
   a) Bestimmen Sie die Verteilung von X, den Erwartungswert $E(X)$ und die Streuung $\sigma(X)$.
   b) Bei einer Party wird das Spiel mit jedem der 300 Gästen gespielt. In welches Intervall fällt die Anzahl zu verteilender Preise mit 95% Wahrscheinlichkeit? (Bestimme Sie dieses Intervall mit einer Näherungsrechung.)

Dieses Aufgabenblatt ist mit der Arbeit abzugeben!

Lösungen Mathematik II schriftlich 2011

Für jede Aufgabe werden 10 Punkte erteilt, sodass ein Total von 40 Punkten erreicht werden kann. Die Note N berechnet sich für die Punktzahl p gemäss

$N = 1 + \frac{p}{8}$,

wobei auf halbe Noten zu runden ist (Viertelnoten aufrunden).

---

1. M liegt auf der Normalen n zu g durch B.

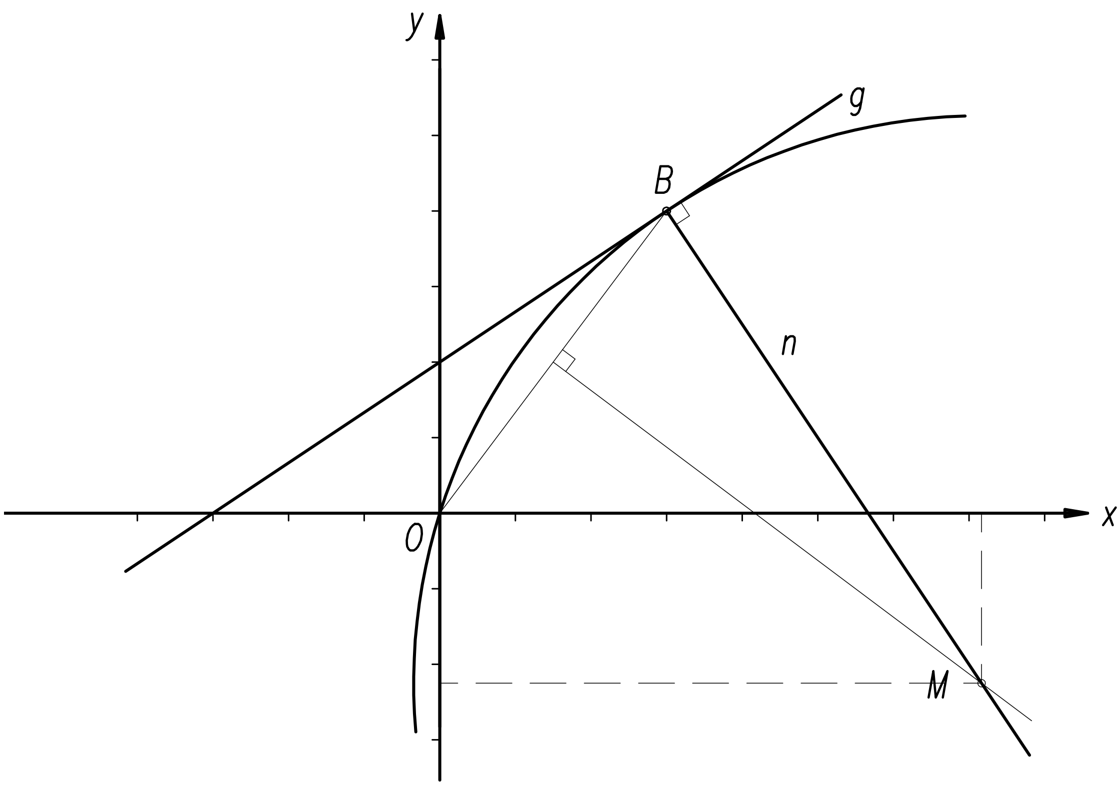
   Gleichung von $n : y = -\frac{3}{2}x + \frac{17}{2}$ $\quad\Rightarrow M\left(x \middle| -\frac{3}{2}x + \frac{17}{2}\right)$ 3P

   $d(M,O)^2 = x^2 + (-\frac{3}{2}x + \frac{17}{2})^2, \qquad d(M,B)^2 = (x-3)^2 + (-\frac{3}{2}x + \frac{17}{2} - 4)^2$

   Gleichsetzen der Abstände liefert eine lineare Gleichung mit der Lösung $x = \frac{43}{6}$

   $\Rightarrow M\left(\frac{43}{6} \middle| -\frac{9}{4}\right)$ 3P

   Radius: $r = d(M,O) = \frac{25\sqrt{13}}{12} \approx 7.51$ 1P



3P

2. Normalebene N zu g durch A geschnitten mit g ergibt B:

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} || \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow N : 2x - y + 2z - 4 = 0$$ 2P

N mit $g : \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ schneiden ergibt $\lambda = 1 \quad \Rightarrow B(3|4|1)$ 2P

$$|AB| = 6 \quad \Rightarrow \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \pm \frac{6}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow C(7|2|5)$$ 2P

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} \quad \Rightarrow D(3|-2|7)$$ 1P

Aus $V = \frac{1}{3}Gh$ ergibt sich $h = 6$

Mittelpunkt von AC: $(3|1|4)$, Normalenvektor $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \; || \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \pm 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow S(1|5|8)$ 3P

3. $\alpha = 60°$: Binomialverteilung mit $p = \dfrac{1}{6}$ und $n = 5 \quad \Rightarrow P(X = k) = \binom{5}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{5-k}$

a) $P(X = 1) = \dfrac{3125}{7776} \approx 0.402$ 1P

b) $P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - \left(\dfrac{5}{6}\right)^5 - \dfrac{3125}{7776} = \dfrac{763}{3888} \approx 0.196$ 1P

c) Für beliebiges p gilt:

$P(X = 1) + P(X = 4) = \binom{5}{1}p(1-p)^4 + \binom{5}{4}p^4(1-p) = 5p(1-p)(3p^2 - 3p + 1)$ 2P

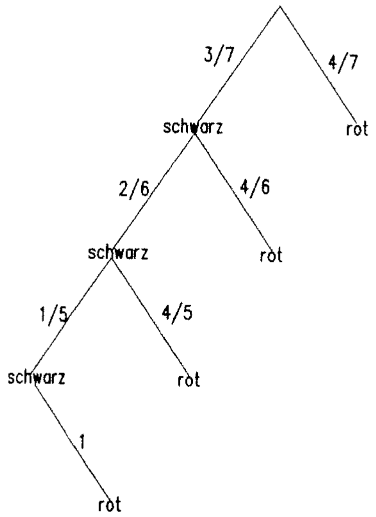
$P(X = 2) + P(X = 3) = \binom{5}{1}p^2(1-p)^3 + \binom{5}{3}p^3(1-p)^2 = 10p^2(1-p)^2$ 2P

Gleichsetzen liefert nach Division durch $p(p-1)$ die quadratische Gleichung $5p^2-5p+1 = 0$ mit den Lösungen $p_1 = \dfrac{5+\sqrt{5}}{10} \approx 0.724$ und $p_2 = \dfrac{5-\sqrt{5}}{10} \approx 0.276$. Die entsprechenden Winkel sind:

$\alpha_1 \approx 260.50°$ und $\alpha_2 \approx 99.50°$ 3P

$\Rightarrow P(A) = 0.4$ in beiden Fällen. 1P

4. a) Mit Hilfe des Baumes



ergibt sich die Verteilung

x	1	2	3	4
$q(x)$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{1}{35}$

3P

$$E(X) = \Sigma x \cdot q(x) = \frac{8}{5}$$ 1P

$$V(X) = E(X^2) - E(X) = \frac{16}{25}, \quad \Rightarrow \sigma = \frac{4}{5}$$ 2P

b) Unabhängige Versuche:

$$\mu = E(X) = 300 \cdot \frac{8}{5} = 480, \quad V(X) = 300 \cdot \frac{16}{25} = 192 \quad \Rightarrow \sigma = \sqrt{192} \approx 13.86$$

Normalverteilung: $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 95\% \Rightarrow$ Bereich$[466, 494]$ 4P