ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Ecole polytechnique fédérale de Zurich
Politecnico federale di Zurigo

Rektorat

Schriftliche Aufnahmeprüfung **Herbst 2010**

Anwendungen der Mathematik (Geometrie und Statistik)

Kandidaten-Nummer:	....
NAME:	....
Vorname:	....

Die Resultate müssen den **vollständigen Lösungsweg** und **alle Zwischenresultate** enthalten.
Beschluss der Aufnahmeprüfungskommission vom 15.9.2000.

1. Gegeben sind die Geraden $g : A(12 \mid 1 \mid 4)\,B(4 \mid 5 \mid -4)$ und $h : P(0 \mid -5 \mid 4)\,Q(2 \mid 3 \mid 6)$.
   a) Zeigen Sie, dass diese Geraden nicht parallel sind und sich nicht schneiden.
   b) Zeigen Sie, dass h in der Mittelnormalebene der Strecke AB liegt. Was bedeutet dies für ein Dreieck ABC mit $C \in h$? Skizzieren Sie die Situation.
   c) Bestimmen Sie den Punkt C auf h so, dass der Flächeninhalt des Dreiecks ABC minimal wird.
2. Gegeben sind die Kreise $k_1 : x^2 + 4x + y^2 - 12 = 0$ und $k_2 : x^2 - 4x + y^2 = 0$.
   a) Bestimmen Sie von den beiden Kreisen jeweils den Mittelpunkt und den Radius.
   b) Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise, die k_1 und k_2 von derselben Seite (entweder beide von aussen oder beide von innen) berühren, ist eine Hyperbel. Bestimmen Sie die Gleichung dieser Hyperbel; bestimmen Sie auch die Gleichung ihrer Asymptoten.
3. a) In einer Urne befinden sich 5 rote und 11 grüne Kugeln. Man zieht zwei Kugeln ohne Zurücklegen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugeln dieselbe Farbe haben?
   b) Sie haben zwei Kugeln mit derselben Farbe gezogen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie beide grün sind?
   c) Nun befinden sich x rote und weiterhin 11 grüne Kugeln in der Urne. Wir bezeichnen mit $P(x)$ die Wahrscheinlichkeit, dass 2 gleichfarbige Kugeln gezogen werden. Für welches x ist $P(x) = P\,(x + 1)$?
4. Anna und Bruno werfen 8 faire Münzen, wobei Anna a Franken und Bruno b Franken als Einsatz auf den Tisch legen. Wenn die Anzahl "Kopf" ungerade ist, erhält Anna beide Einsätze (a und b), zugesprochen. Fallen alle Münzen auf die gleiche Seite (alle "Kopf" oder alle "Zahl"), erhält Anna beide Einsätze (a und b), und Bruno muss ihr zusätzlich b Franken abliefern. In allen anderen Fällen gehen die beiden Einsätze a und b an Bruno.
   a) Es bezeichne X den Gewinn von Anna. Finden Sie die Verteilung von X und berechnen Sie den Erwartungswert $E(X)$.
   b) Für welches Verhältnis $a : b$ der beiden Einsätze wird das Spiel fair, d.h. $E(X) = 0$? Berechnen Sie für diesen Fall die Streuung σ in Abhängigkeit von b.

Dieses Aufgabenblatt ist mit der Arbeit abzugeben!

Lösungen Anwendungen der Mathematik schriftlich 2010

Für jede Aufgabe werden 10 Punkte erteilt, sodass ein Total von 40 Punkten erreicht werden kann. Die Note N berechnet sich für die Punktzahl p gemäss

$N = 1 + \frac{p}{8}$,

wobei auf halbe Noten zu runden ist (Viertelnoten aufrunden).

---

1. a) $\vec{r_g} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\quad \vec{r_h} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, nicht parallel

$g \cap h: \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ hat keine Lösung 2P

b) $M_{AB}(8|3|0)$, Gleichung der Mittelnormalebene $N: 2x - y + 2z - 13 = 0$

Es ist $P \in N$ und $Q \in N$

Ein Dreieck ABC ist gleichschenklig.

3P

c) Flächeninhalt minimal, wenn Höhe auf AB minimal.

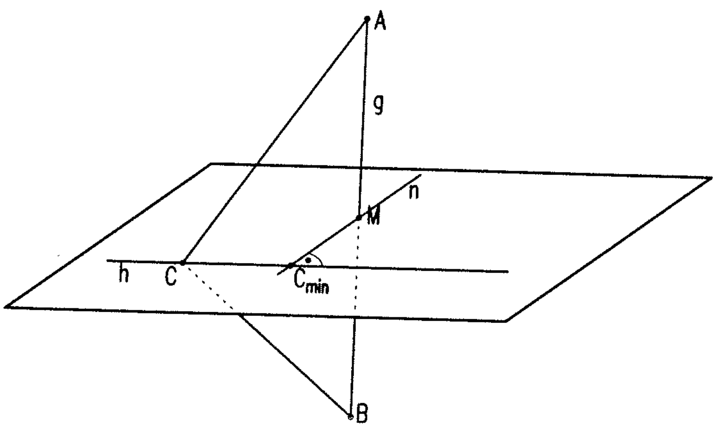
$\vec{r_g} \times \vec{r_h} = \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$n: \vec{r} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$n \cap h: \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = 6, \mu = 2, \Longrightarrow C_{min}(2|3|6)$

3P



2P

2. a) $k_1 : (x+2)^2 + y^2 = 16 \quad \Longrightarrow \quad r_1 = 4, \quad M_1(-2|0)$

$k_2 : (x-2)^2 + y^2 = 4 \quad \Longrightarrow \quad r_2 = 2, \quad M_2(2|0)$

2P

b) $d_1 = \sqrt{(x+2)^2 + y^2} - 4$

$d_2 = \sqrt{(x-2)^2 + y^2} - 2$

$d_1 = d_2 \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{(x+2)^2 + y^2} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2} + 2 \qquad |\ ^2$

$x^2 + 4x + 4 + y^2 = x^2 - 4x + 4 + y^2 + 4\sqrt{(x-2)^2 + y^2} + 4$

$8x - 4 = 4\sqrt{(x-2)^2 + y^2}$

$2x - 1 = \sqrt{(x-2)^2 + y^2} \qquad |\ ^2$

$4x^2 - 4x + 1 = x^2 - 4x + 4 + y^2$

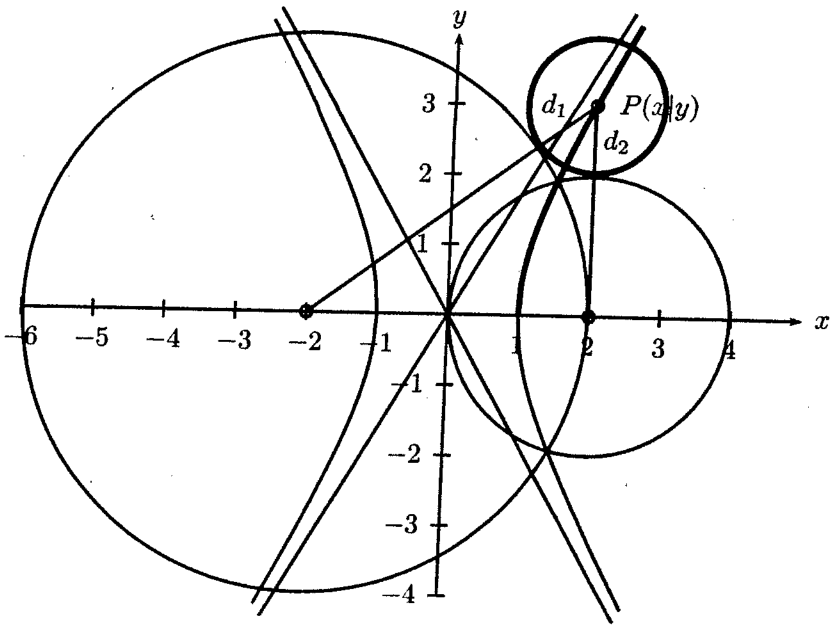
$3x^2 - y^2 = 3$

$x^2 - \dfrac{y^2}{3} = 1$

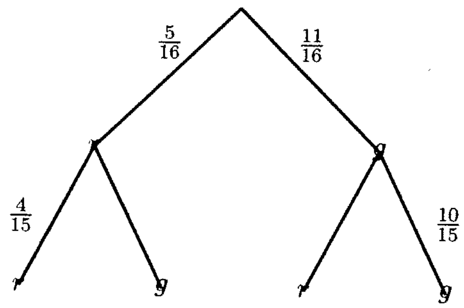
6P

Asymptoten: $y = \pm\sqrt{3}x$

2P



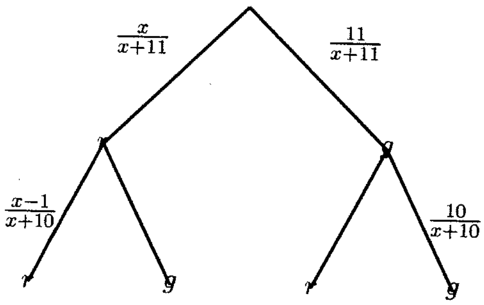
3. a)



$$P(rr,gg) = \frac{20}{240} + \frac{110}{240} = \frac{13}{24}$$ 3P

b) $$P(gg|(rr,gg)) = \frac{P(gg)}{P(rr,gg)} = \frac{\frac{110}{240}}{\frac{130}{240}} = \frac{11}{13}$$ 2P

c)



$$P(x) = \frac{x(x-1)}{(x+11)(x+10)} + \frac{110}{(x+11)(x+10)} = \frac{x^2-x+110}{(x+11)(x+10)}$$

$$P(x+1) = \frac{(x+1)^2-(x+1)+110}{(x+12)(x+11)} = \frac{x^2+x+110}{(x+12)(x+11)}$$

$$P(x) = P(x+1) \implies (x+12)(x^2-x+110) = (x+10)(x^2+x+110) \implies$$

$$x^3+11x^2+98x+1320 = x^3+11x^2+120x+1110$$

$$220 = 22x \implies x = 10$$ 5P

4. a)

Anzahl Kopf	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$p(x)$	$\frac{1}{256}$	$\frac{8}{256}$	$\frac{28}{256}$	$\frac{56}{256}$	$\frac{70}{256}$	$\frac{56}{256}$	$\frac{28}{256}$	$\frac{8}{256}$	$\frac{1}{256}$
Gewinn Anna	$2b$	b	$-a$	b	$-a$	b	$-a$	b	$2b$

Verteilung:

x	$-a$	b	$2b$
$q(x)$	$\frac{63}{128}$	$\frac{64}{128}$	$\frac{1}{128}$

4P

$$E(X) = \frac{-63a + 64b + 2b}{128} = \frac{66b - 63a}{128}$$

1P

b) $66b = 63a \quad \Longrightarrow \quad a : b = 66 : 63 = 22 : 21$ (beides richtig) 1P

Verteilung:

x	$-\frac{22}{21}b$	b	$2b$
$q(x)$	$\frac{63}{128}$	$\frac{64}{128}$	$\frac{1}{128}$

$$V(X) = \left(-\frac{22}{21}b\right)^2 \cdot \frac{63}{128} + b^2 \cdot \frac{64}{128} + 4b^2 \cdot \frac{1}{128} = \frac{15}{14}b^2$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{15}{14}}\,b = \frac{\sqrt{210}}{14}\,b \approx 1.04b$$

4P