ETH

Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Ecole polytechnique fédérale de Zurich
Politecnico federale di Zurigo

Rektorat

Schriftliche Aufnahmeprüfung **Herbst 2007**

ANWENDUNGEN DER MATHEMATIK (deutsch)

Kandidat.-Nr.

Name:
Vorname:

Die Resultate müssen den **vollständigen Lösungsweg** und **alle Zwischenresultate** enthalten.
(Beschluss der Aufnahmeprüfungskommission vom 15.9.2000)

1. a) Beschreibe kurz den Algorithmus von Gauss zur Auflösung linearer Gleichungssysteme.

   b) Wende das Verfahren auf das folgende Gleichungssystem an und bestimme die Lösungsmenge für $a = 3$. Für welchen Wert von a hat das System keine Lösung?

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & -1 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & = & 12 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & -3 \\ 4x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & ax_4 & = & 2 \end{array}$$

2. Ein Grossverteiler muss 1000 Säcke Zement an drei Geschäfte G_1, G_2 und G_3 liefern. Der Zement wird in zwei Lagerhallen L_1 und L_2 an verschiedenen Orten aufbewahrt. Die Transportkosten je Sack, der Bedarf an Zement in den drei Geschäften und der Lagerbestand sind aus der folgenden Tabelle ersichtlich:

	Transportkosten in CHF je Sack		Bedarf in den Geschäften
	von L_1 aus	von L_2 aus	
G_1	0.90	0.60	300
G_2	1.00	0.40	500
G_3	1.20	1.00	200
Lagerbestand	600	400	1000

Wie ist der Transport zu organisieren, damit die gesamten Transportkosten möglichst klein sind?

3. Ein Glücksrad ist in zwei Sektoren S_1 und S_2 aufgeteilt. S_1 trete mit der Wahrscheinlichkeit p ein. Ein Spieler dreht das Rad genau k-mal und er gewinnt, wenn im ganzen Spielablauf genau einmal der Sektor S_1 angezeigt wird.

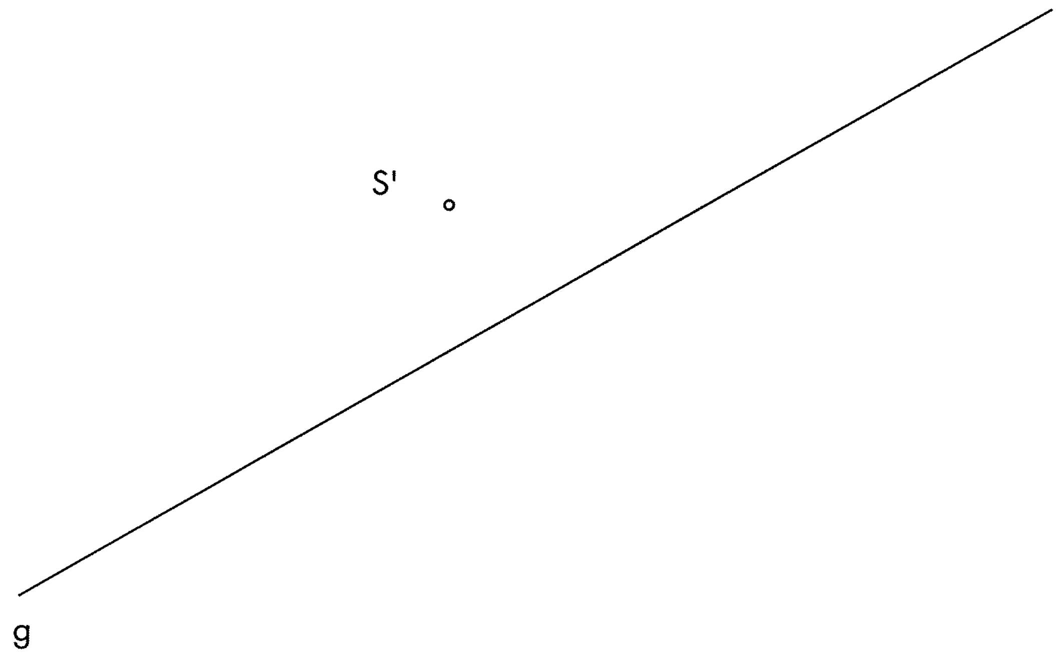
   a) Für welchen Wert von p (in Abhängigkeit von k) ist seine Gewinnchance maximal, und wie gross ist sie dann?

   b) Wie gross ist seine Gewinnchance, wenn er das Rad beliebig oft drehen darf?

4. Gegeben sind die Gerade g in der Zeichenebene und der Punkt S durch seine Normalprojektion S' auf die Zeichenebene und den Abstand $3\,\text{cm}$ von der Zeichenebene (siehe Arbeitsblatt). Der Punkt S ist der Schwerpunkt eines regelmässigen Tetraeders, von dem eine Kante auf g liegt.
   Stelle die Normalprojektion des Tetraeders auf die Zeichenebene dar. Zusätzlich verlangt sind eine vollständige stereometrische Skizze (Schrägbild) und eine Lösungsbeschreibung.

Dieses Aufgabenblatt ist mit der Arbeit abzugeben.

Arbeitsblatt Aufgabe 4



An die Examinatoren in Anwendungen der Mathematik (Herbst 2007)

Bewertungsanleitung:

Es werden für jede Aufgabe 8 Punkte erteilt, so dass ein Total von 32 Punkten erreicht werden kann. Die Note N für die schriftliche Prüfung ist bei der Punktzahl n nach der Formel

$$N = 1 + n/6$$

zu berechnen und auf halbe Noten zu runden, wobei Viertel aufzurunden sind. (Maximalnote 6)

1. a) Klare Beschreibung des Algorithmus von Gauss — 2

   b) Anwendung auf das gegebene Gleichungssystem ersichtlich — 2

   $$x_1 = \frac{34a-62}{37+a} \qquad x_2 = \frac{-28a+44}{37+a} \qquad x_3 = \frac{7a+139}{37+a} \qquad x_4 = \frac{-120}{37+a}$$

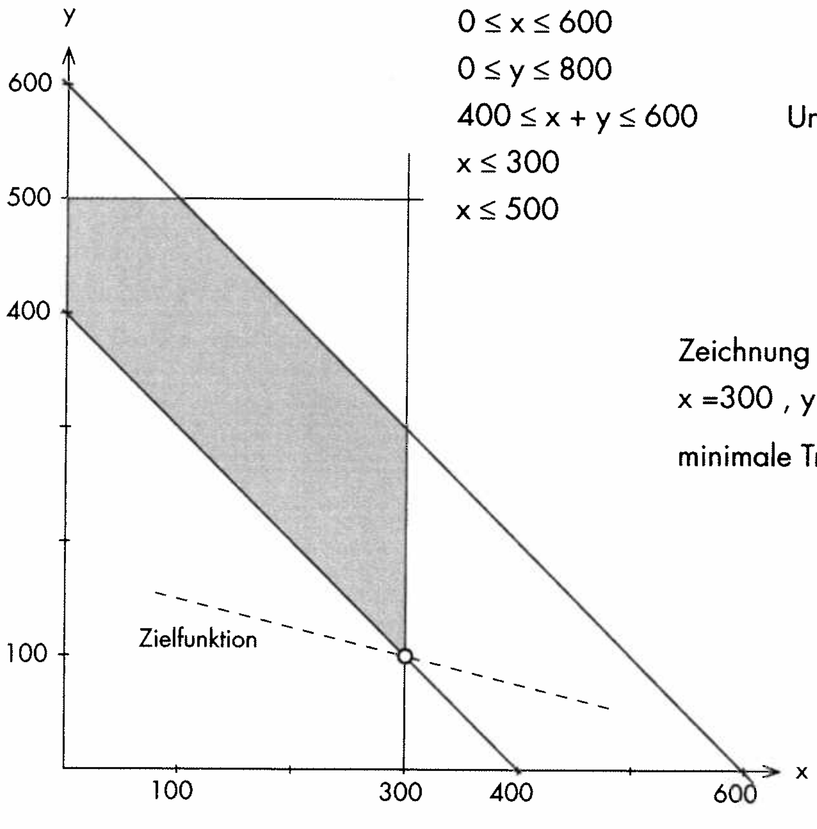
   mindestens eine der Lösungen — 2

   $$x_1 = 1 \qquad x_2 = -1 \qquad x_3 = 4 \qquad x_4 = -3$$ — 1

   keine Lösung für $a = -37$ — 1 — **8**

2. Ansatz: von L_1 an G_1 werden x Säcke geliefert
   von L_1 an G_2 werden y Säcke geliefert
   von L_1 an G_3 werden dann $600 - x - y$ Säcke geliefert
   von L_2 an G_1 werden dann $300 - x$ Säcke geliefert
   von L_2 an G_2 werden dann $500 - y$ Säcke geliefert
   von L_2 an G_3 werden dann $x + y - 400$ Säcke geliefert — 2

   Zielfunktion $z = \ldots\ldots = 0.1x + 0.4y + 700$ — 1



$0 \le x \le 600$
$0 \le y \le 800$
$400 \le x + y \le 600$ Ungleichungssystem — 2
$x \le 300$
$x \le 500$

Zeichnung — 1

$x = 300$, $y = 100$ — 1

minimale Transportkosten CHF 770.– — 1 — **8**

3. a) richtiger Ansatz 1

$$P(k) = kp(1-p)^{k-1}$$ 2

mittels Differentialrechnung oder Abschätzung von $\dfrac{P(k)}{P(k-1)} \geq 1$

ergibt $p = \dfrac{1}{k}$ 2

und $P_{max} = \left(1 - \dfrac{1}{k}\right)^{k-1}$ 1

b) $P = \lim\limits_{k \to \infty} \left(1 - \dfrac{1}{k}\right)^{k-1} = \dfrac{1}{e}$ 2 **8**

4. vollständige stereometrische Skizze 2

Lösungsbeschreibung: Erkennen des Zusammenhangs zwischen der Kante und der Strecke MS (M: Mittelpunkt der Kante auf g) 1

Kantenlänge: $a = 2\sqrt{2}\,MS$ 2

Konstruktion: Kantenlänge 1

Ecken auf g 1

restliche Ecken 1 **8**