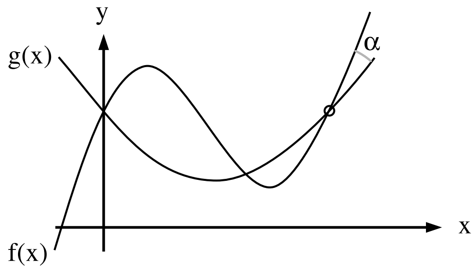
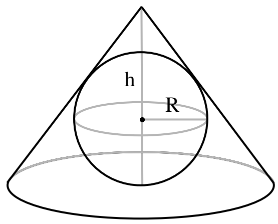
ETH-Aufnahmeprüfung Herbst 2015

Mathematik I (Analysis)

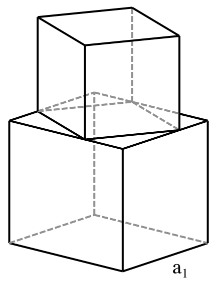


Aufgabe 1 [6 Punkte]
Bestimmen Sie den Schnittwinkel α zwischen den Graphen der Funktionen $f(x)=x^3-4x^2+3x+5$ und $g(x)=x^2-3x+5$ im Schnittpunkt mit der grössten x-Koordinate.

Aufgabe 2 [6 Punkte]
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung des Polynoms dritten Grades f(x), das einen Wendepunkt in $W(2|0)$ und ein Maximum in $M(1|2)$ hat.



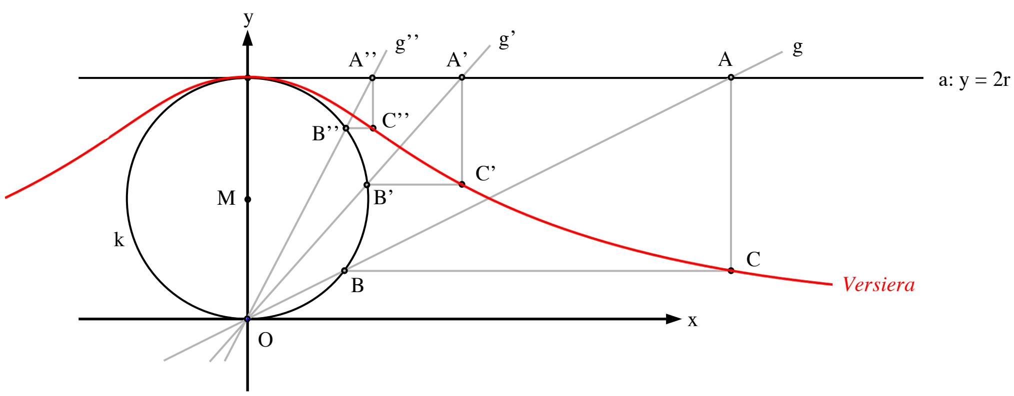
Aufgabe 3 [11 Punkte]
Einer Kugel mit Radius R = 1 wird ein gerader Kreiskegel umschrieben. Bestimmen Sie die Höhe h des Kegels mit minimalem Volumen.



Aufgabe 4 [8 Punkte]
Eine unendliche Folge von Würfeln ist aufeinander gestapelt. Die Grundflächenecken eines jeden Würfels liegen auf den Kanten des darunterliegenden Würfels und teilen diese im Verhältnis 2 zu 1 (vgl. Abbildung mit den ersten zwei Würfeln).

a) Sei a_1 die Kante des ersten Würfels. Bestimmen Sie das Volumen des Turms bestehend aus unendlich vielen Würfeln.
b) Wie viele Würfel sind nötig, um eine Höhe zu erreichen, die sich von der Endhöhe um weniger als 0.01% unterscheidet?

Aufgabe 5 [7 Punkte + 5 Punkte]
Die *Versiera der Agnesi* ist eine ebene Kurve, die 1748 von der italienischen Mathematikerin Maria Gaetana Agnesi veröffentlicht wurde.
Gegeben ist der Kreis k (Mittelpunkt $M(0|r)$ und Radius r) und die Gerade a: y = 2r. Man verbindet mittels der Geraden g einen beliebigen Punkt $A(x_A|y_A)\in a$ mit dem Ursprung. Sei $B(x_B|y_B)$ der Schnittpunkt der Geraden g mit dem Kreis k. Man definiert nun $C(x_A|y_B)$ als den Punkt mit der gleichen x-Koordinate wie A und der gleichen y-Koordinate wie B. Die *Versiera* besteht aus allen so definierten Punkten C.



a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der *Versiera der Agnesi* im kartesischen Koordinatensystem.
b) In welchem Verhältnis stehen die Inhalte des Kreises und der Fläche zwischen *Versiera* und x-Achse?
Tipp: benutzen Sie dafür die Liste der speziellen unbestimmten Integrale in der Formelsammlung.

Falls Sie Teilaufgabe a) nicht lösen konnten, nehmen Sie anstatt der *Versiera* die Funktion $t(x)=\dfrac{32r^3}{x^2+16r^2}$.

Lösungen Mathematik I (Analysis) – Herbst 2015

Die Note N berechnet sich für die Punktzahl p gemäss der Formel $N = 1 + \frac{p}{8}$, wobei auf halbe Noten zu runden ist (Viertelnote aufrunden).

Lösung 1

- Schnittpunkt: $x^3 - 4x^2 + 3x + 5 = x^2 - 3x + 5$ **[1 pt]**
  $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$
  $x(x-2)(x-3) = 0$
  $\Rightarrow \quad x_1 = 3 \ (x_2 = 0, x_3 = 2)$ **[1 pt]**
- Ableitungen: $g'(x) = 2x - 3$, $f'(x) = 3x^2 - 8x + 3$ **[1 pt]**
- Steigungen: $g'(3) = 3$, $f'(3) = 6$ **[1 pt]**
- Winkel: $\alpha = \arctan(f'(3)) - \arctan(g'(3)) = \arctan(6) - \arctan(3) = 0.1566$ bzw. $\alpha = 8.97°$ **[2 pt]**

Lösung 2

- Sei $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ das gesuchte Polynom. Die ersten zwei Ableitungen sind:

  $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ und $f''(x) = 6ax + 2b$ **[1 pt]**

Dann gilt:

- $f(2) = 0 \quad \Rightarrow \quad 8a + 4b + 2c + d = 0$ (I)
- $f''(2) = 0 \quad \Rightarrow \quad 12a + 2b = 0$ (II)
- $f(1) = 2 \quad \Rightarrow \quad a + b + c + d = 2$ (III)
- $f'(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3a + 2b + c = 0$ (IV)

[2 pt]

- Aus (II) folgt: $6a + b = 0$ (V)
- Aus (I) und (III) folgt: $7a + 3b + c = -2$ (VI)
- Aus (IV) und (VI) folgt: $4a + b = -2$ (VII)
- Aus (V) und (VII) folgt: $2a = 2$ (VIII)

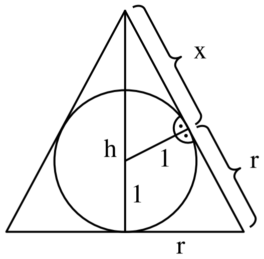
[2 pt]

Lösung: $a = 1, b = -6, c = 9, d = -2$ bzw. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ **[1 pt]**

Bemerkung: Die zusätzliche Überprüfung, dass $M(1|2)$ tatsächlich ein Maximum und $W(2|0)$ tatsächlich ein Wendepunkt ist ($f''(x) = 6x - 12 \Rightarrow f''(1) = -6 < 0$ bzw. $f'''(x) = 6 \Rightarrow f'''(2) = 6 \neq 0$), wird mit einem Bonuspunkt gewürdigt.

Lösung 3

- Querschnitt:



[1 pt]

- Für die ganze Aufgabe gilt: $h > 2$
- Volumen: $V = \dfrac{\pi r^2 h}{3}$ **[1 pt]**
- Nebenbedingungen: $\sqrt{h^2 + r^2} = r + x$, wobei $\sqrt{(h-1)^2 - 1^2} = x$ **[2 pt]**
- Vereinfachung: $\sqrt{h^2 + r^2} = r + \sqrt{(h-1)^2 - 1^2}$ **[1 pt]**

$$\left.\begin{aligned}
\sqrt{h^2 + r^2} &= r + \sqrt{h^2 - 2h} \\
h^2 + r^2 &= r^2 + 2r\sqrt{h^2 - 2h} + h^2 - 2h \\
0 &= 2r\sqrt{h^2 - 2h} - 2h \\
h &= r\sqrt{h^2 - 2h} \\
h^2 &= r^2\left(h^2 - 2h\right) \\
\frac{h^2}{h^2 - 2h} &= r^2 \\
\frac{h}{h-2} &= r^2
\end{aligned}\right\} \quad \textbf{[2 pt]}$$

- Zielfunktion: $V(h) = \dfrac{\pi h^2}{3(h-2)}$ **[1 pt]**
- Lösung: $V'(h) = 0$

$$V'(h) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{2h(h-2) - h^2}{(h-2)^2} = 0 \quad \textbf{[1 pt]}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad 2h(h-2) - h^2 &= 0 \\
2h^2 - 4h - h^2 &= 0 \\
h^2 &= 4h \\
h &= 4 \quad \textbf{[1 pt]}
\end{aligned}$$

- Überprüfung des Minimums:
  - $V(h)$ ist für $h > 2$ stetig;
  - $\lim\limits_{h \searrow 2} V(h) = \infty$ und $\lim\limits_{h \to \infty} V(h) = \infty$
  - Folglich muss $P\left(4 \middle| V(4)\right)$ ein Minimum sein. **[1 pt]**

Der letzte Punkt soll selbstverständlich auch gegeben werden, wenn stattdessen die Bedingung $V''(4) > 0$ überprüft wird...

$$V''(h) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{(2h-4)(h-2)^2 - 2\left(h^2 - 4h\right)(h-2)}{(h-2)^4} \qquad \Rightarrow \qquad V''(4) = \frac{\pi}{3} > 0$$

oder das Vorzeichenwechsel-Verfahren angewendet wird.

$$V'(h) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{h(h-4)}{(h-2)^2} \qquad \Rightarrow \qquad V'(h) < 0 \text{ für } h \in \left]2;4\right[\text{ und } V'(h) > 0 \text{ für } h \in \left]4;\infty\right[.$$

Lösung 4.a

- Kante des zweiten Würfels: $a_2 = \sqrt{\left(\frac{a_1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2a_1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5} \cdot a_1}{3}$ **[1 pt]**
- Quotient der geometrischen Folge $a_1, a_2, \ldots$ (Kanten): $q = \frac{\sqrt{5}}{3}$ **[1 pt]**
- Quotient der geometrischen Folge $(a_1)^3, (a_2)^3, \ldots$ (Volumen): $q' = q^3 = \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^3 = \frac{5\sqrt{5}}{27}$ **[1 pt]**
- Volumen des unendlichen Turms: $V_\infty = \frac{a_1^{\,3}}{1-q'} = \frac{27 \cdot a_1^{\,3}}{27 - 5\sqrt{5}}$ **[1 pt]**

Lösung 4.b

- Sei n die gesuchte Anzahl Würfel.

$$\left.\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} a_i &> 99.99\% \sum_{i=1}^{\infty} a_i \\
a_i \frac{1-q^n}{1-q} &> 0.9999 \cdot a_i \frac{1}{1-q} \\
1-q^n &> 0.9999 \\
0.0001 &> q^n
\end{aligned}\right\}$$ **[2 pt]**

- Sei $m \in \mathbb{R}$ so dass $0.0001 = q^m$. $\Rightarrow$ $m = \log_q(0.0001) = \frac{\ln(0.0001)}{\ln(q)} \approx 31.339$ **[1 pt]**

  $\Rightarrow$ $n = 32$ **[1 pt]**

Aufgabe 5.a)

- Der Kreis k wird durch die Gleichung k: $x^2+(y-r)^2=r^2$ definiert. **[1 pt]**
- Sei $A(x_A|2r)$ ein beliebiger Punkt auf der Geraden a. Die Gerade g hat die Gleichung $y=\frac{2r}{x_A}x$. **[1 pt]**
- Koordinate y des Schnittpunkts B:

$$\left(\frac{x_A y}{2r}\right)^2+(y-r)^2=r^2$$ **[1 pt]**

$$\frac{x_A{}^2}{4r^2}y^2+y^2-2ry+r^2=r^2$$

$$\frac{x_A{}^2}{4r^2}y^2+y^2-2ry=0$$

$$\left(\frac{x_A{}^2}{4r^2}+1\right)y^2-2ry=0 \quad (y\neq 0)$$

$$\left(\frac{x_A{}^2}{4r^2}+1\right)y=2r$$

$$y=\frac{2r}{\frac{x_A{}^2}{4r^2}+1}=\frac{8r^3}{x_A{}^2+4r^2}$$

[2 pt]

- Koordinaten des Punkts C: $C\left(x_A\middle|\frac{8r^3}{x_A{}^2+4r^2}\right)$ **[1 pt]**

- Die *Versiera der Agnesi* hat also die Funktionsgleichung $f(x)=\frac{8r^3}{x^2+4r^2}$. **[1 pt]**

Aufgabe 5.b)

- Aus der Formelsammlung: $\int\frac{1}{x^2+a^2}dx=\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)+C$ **[1 pt]**
- Sei $a=2r$, so gilt: $\int\frac{1}{x^2+4r^2}dx=\frac{1}{2r}\arctan\left(\frac{x}{2r}\right)+C$ **[1 pt]**
- Es folgt:

$$A_1=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{8r^3}{x^2+4r^2}dx=8r^3\cdot\lim_{b\to\infty}\left(\lim_{a\to-\infty}\left[\frac{1}{2r}\arctan\left(\frac{x}{2r}\right)\right]_a^b\right)$$

$$=8r^3\left[\frac{1}{2r}\cdot\frac{\pi}{2}\right]-8r^3\left[\frac{1}{2r}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=4\pi r^2$$

[2 pt]

- Kreisinhalt: $A_2=\pi r^2$
- Verhältnis der Flächen: $A_1:A_2=4\pi r^2:\pi r^2=4:1$ **[1 pt]**

Aufgabe 5.b) mit t(x) anstatt der *Versiera*

- Aus der Formelsammlung: $\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)+C$ **[1 pt]**
- Sei $a = 4r$, so gilt: $\int \frac{1}{x^2+16r^2}\,dx = \frac{1}{4r}\arctan\left(\frac{x}{4r}\right)+C$ **[1 pt]**
- Es folgt:

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{32r^3}{x^2+16r^2}\,dx = 32r^3 \cdot \lim_{b\to\infty}\left(\lim_{a\to-\infty}\left[\frac{1}{4r}\arctan\left(\frac{x}{4r}\right)\right]_a^b\right) \\ &= 32r^3\left[\frac{1}{4r}\cdot\frac{\pi}{2}\right] - 32r^3\left[\frac{1}{4r}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = 8\pi r^2 \end{aligned}\right\} \textbf{[2 pt]}$$

- Kreisinhalt: $A_2 = \pi r^2$
- Verhältnis der Flächen: $A_1 : A_2 = 8\pi r^2 : \pi r^2 = 8:1$ **[1 pt]**