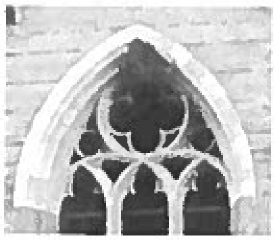
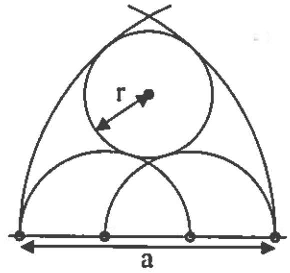
ETH-Aufnahmeprüfung Herbst 2014

Mathematik I (Analysis)

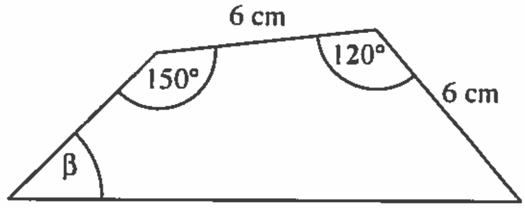
Aufgabe 1 (5 + 5 Punkte)

a) Das gotische Fenster kann im wesentlichen auf zwei Halbkreise, einen Kreis und zwei Kreisbogen vereinfacht werden. Die drei Abschnitte der Strecke a sind gleich lang. Drücken Sie die Basis a als Funktion des Radius r aus.





b) Bestimmen Sie den Winkel β. Benutzen Sie dazu u.a. die exakten Werte der trigonometrischen Funktionen (siehe Formelsammlung).



Aufgabe 2 (10 Punkte)

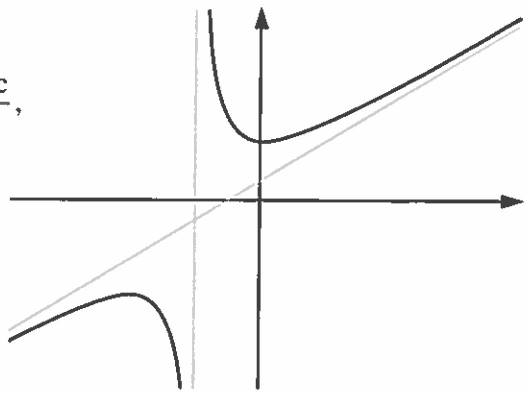
Gegeben ist die Funktion $f(x) = ax \cdot e^{a^2x+x}$ mit $a \in \mathbb{R}^+$. Bestimmen Sie a, so dass die Fläche, welche von der x-Achse und dem Funktionsgraphen im dritten Quadranten eingeschlossen wird, extremal ist.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Bestimmen Sie die Gleichung der Funktion $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{x + d}$,

deren Graph folgende Eigenschaften hat:

- die schiefe Asymptote hat die Gleichung $y = 2x + 1$;
- der Punkt A(-2|-5) ist ein Maximum.

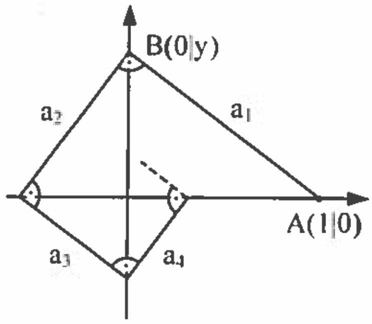


Aufgabe 4 (10 Punkte)

Die Strecken in der nebenstehenden Figur stehen senkrecht zueinander; ihre Längen a_1, a_2,... bilden eine geometrische Folge.

Die Länge der unendlichen Spirale $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist 5.

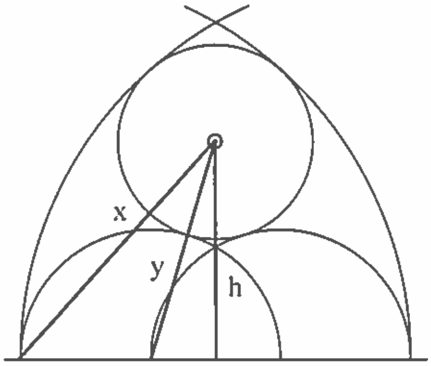
Bestimmen Sie die y-Koordinate des Punktes B.



Lösungen Mathematik I (Analysis) Herbst 2014

Die Note N berechnet sich für die Punktzahl p gemäss der Formel $N = 1 + \frac{p}{8}$, wobei auf halbe Noten zu runden ist (Viertelnote aufrunden).

Aufgabe 1.a)



- $x = a - r$

  $y = \frac{a}{3} + r$ **1 pt**

- $h^2 = x^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = (a-r)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$

  $h^2 = y^2 - \left(\frac{a}{6}\right)^2 = \left(\frac{a}{3}+r\right)^2 - \left(\frac{a}{6}\right)^2$ **1 pt**

- $(a-r)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{3}+r\right)^2 - \left(\frac{a}{6}\right)^2$ **1 pt**

  $a^2 - 2ar + r^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{9} + \frac{2ar}{3} + r^2 - \frac{a^2}{36}$

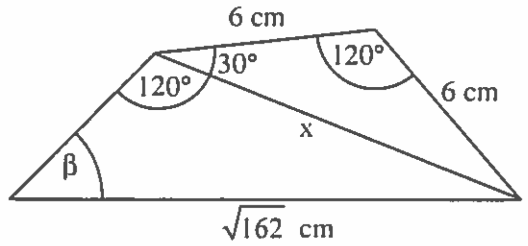
  $36a^2 - 72ar - 9a^2 = 4a^2 + 24ar - a^2$

  $24a^2 - 96ar = 0$ **1 pt**

  $24a(a - 4r) = 0$

- Lösung: $a = 4r$ **1 pt**

Aufgabe 1.b)



- $x = \sqrt{6^2 + 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \cos(120°)} = \sqrt{72 + 72 \cdot \sin(30°)} = \sqrt{72 + 72 \cdot 0.5} = \sqrt{108}$ **2 pt**

- $\frac{x}{\sin(\beta)} = \frac{\sqrt{162}}{\sin(120°)}$ **1 pt**

  $\Rightarrow \quad \sin(\beta) = \frac{\sin(120°) \cdot x}{\sqrt{162}} = \frac{\cos(30°) \cdot \sqrt{108}}{\sqrt{162}} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{108}}{2\sqrt{162}} = \frac{\sqrt{324}}{2\sqrt{162}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ **1 pt**

  $\Rightarrow \quad \beta = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 45°$ **1 pt**

Aufgabe 2 – Variante 1

- Stammfunktion von $f(x)$ (partielle Integration):

$$\int f(x)dx = \int ax \cdot e^{x(a^2+1)}dx = ax \cdot \frac{e^{x(a^2+1)}}{a^2+1} - \int a \cdot \frac{e^{x(a^2+1)}}{a^2+1}dx$$

$$= ax \cdot \frac{e^{x(a^2+1)}}{a^2+1} - a \cdot \frac{e^{x(a^2+1)}}{\left(a^2+1\right)^2} = e^{x(a^2+1)}\left(\frac{ax}{a^2+1} - \frac{a}{\left(a^2+1\right)^2}\right)$$ **3 pt**

- Integral:

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)dx = \lim_{b\to-\infty}\left[e^{x(a^2+1)}\left(\frac{ax}{a^2+1} - \frac{a}{\left(a^2+1\right)^2}\right)\right]_b^0 = -\frac{a}{\left(a^2+1\right)^2}$$ **2 pt**

- Fläche:

$$A = \frac{a}{\left(a^2+1\right)^2} = \frac{a}{a^4+2a^2+1}$$ **1 pt**

- Fläche extremal:

$$A'(a)=0: \quad A'(a) = \frac{\left(a^4+2a^2+1\right) - a\left(4a^3+4a\right)}{\left(a^4+2a^2+1\right)^2} = \frac{-3a^4-2a^2+1}{\left(a^4+2a^2+1\right)^2} = 0$$ **2 pt**

- Biquadratische Gleichung lösen:

$$3a^4+2a^2-1=0$$
$$\left(3a^2-1\right)\left(a^2+1\right)=0$$
$$\Rightarrow a = \sqrt{\frac{1}{3}} \quad \left(a = -\sqrt{\frac{1}{3}} \text{ ist keine Lösung, da } a>0 \text{ sein muss.}\right)$$ **2 pt**

- Die biquadratische Gleichung kann auch in eine quadratische Gleichung umgewandelt und mit der entsprechenden Formel gelöst werden:

$$a^2 =: k: \quad 3k^2+2k-1=0$$
$$k_{1,2} = \frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{6} = \frac{1}{3} \text{ oder } -1$$
$$\Rightarrow \quad a = \sqrt{\frac{1}{3}} \quad \left(a = -\sqrt{\frac{1}{3}} \text{ nicht erlaubt}\right)$$ ***ebenfalls 2 pt***

Aufgabe 2 – Variante 2

- Stammfunktion von $f(x)$ (partielle Integration):

$$\int f(x)dx = \int ax \cdot e^{x(a^2+1)}dx = ax \cdot \frac{e^{x(a^2+1)}}{a^2+1} - \int a \cdot \frac{e^{x(a^2+1)}}{a^2+1}dx$$

$$= ax \cdot \frac{e^{x(a^2+1)}}{a^2+1} - a \cdot \frac{e^{x(a^2+1)}}{(a^2+1)^2} = e^{x(a^2+1)}\left(\frac{ax}{a^2+1} - \frac{a}{(a^2+1)^2}\right)$$

3 pt

- Integral:

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)dx = \lim_{b \to -\infty}\left[e^{x(a^2+1)}\left(\frac{ax}{a^2+1} - \frac{a}{(a^2+1)^2}\right)\right]_b^0 = -\frac{a}{(a^2+1)^2}$$

2 pt

- Fläche:

$$A = \frac{a}{(a^2+1)^2}$$

1 pt

- Fläche extremal:

$$A'(a) = 0: \quad A'(a) = \frac{(a^2+1)^2 - a \cdot 2(a^2+1) \cdot 2a}{(a^2+1)^4} = \frac{(a^2+1) - 4a^2}{(a^2+1)^3} = \frac{-3a^2+1}{(a^2+1)^3} = 0$$

3 pt

- Lösungen:

$$-3a^2 + 1 = 0$$

$$a^2 = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{\frac{1}{3}} \quad \left(a = -\sqrt{\frac{1}{3}} \text{ ist keine Lösung, da } a > 0 \text{ sein muss.}\right)$$

1 pt

Aufgabe 3 – Variante 1

- $$f(x)=\left(ax^2+bx+c\right):(x+d)=ax+(b-ad)+\frac{g}{x+d}$$ **2 pt**

  $$\frac{-\left(ax^2+adx\right)}{(b-ad)x+c}$$

- Vergleich mit der schiefen Asymptote:

  (I) $a=2$
  (II) $b-ad=1$ **1 pt**

- Ableitung von $f(x)=2x+1+\dfrac{g}{x+d}$:

  $$f'(x)=2-\frac{g}{(x+d)^2}$$ **1 pt**

- Maximum in A(-2|-5):

  (III) $f(-2)=-5:\quad -3+\dfrac{g}{-2+d}=-5$ **1 pt**

  (IV) $f'(-2)=0:\quad 2-\dfrac{g}{(-2+d)^2}=0$ **1 pt**

- Vereinfachen:

  $$\left.\begin{array}{ll}\text{(III)} & g=-2(d-2)\\ \text{(IV)} & g=2(d-2)^2\end{array}\right\}$$ **1 pt**

- (IV) mit (III) dividieren $(d\neq 2)$:

  $$1=\frac{g}{g}=\frac{2(d-2)^2}{-2(d-2)}=-(d-2)\quad\Rightarrow\quad d=1\quad\Rightarrow\quad g=2$$ **2 pt**

- Lösung:

  $$f(x)=2x+1+\frac{2}{x+1}=\frac{2x^2+3x+3}{x+1}$$ **1 pt**

Aufgabe 3 – Variante 2

- $$f(x)=\left(ax^2+bx+c\right):(x+d)=ax+(b-ad)+\text{Rest}$$ **2 pt**
  $$\underline{-\left(ax^2+adx\right)}$$
  $$(b-ad)x+c$$

- Vergleich mit der schiefen Asymptote:

  (I) $a=2$
  (II) $b-ad=1$ **1 pt**

- Ableitung von f(x):

  $$f'(x)=\frac{(2ax+b)(x+d)-\left(ax^2+bx+c\right)}{(x+d)^2}=\frac{ax^2+2adx+bd-c}{(x+d)^2}$$ **1 pt**

- Maximum in A(-2|-5):

  (III) $f(-2)=-5:\quad \frac{4a-2b+c}{-2+d}=-5$
  (IV) $f'(-2)=0:\quad \frac{4a-4ad+bd-c}{(-2+d)^2}=0$ **1 pt**

- (I) in (II), (III) und (IV) einsetzen:

  (V) $b-2d=1 \quad\Rightarrow\quad b=1+2d$
  (VI) $8-2b+c=10-5d \quad\Rightarrow\quad c=2+2b-5d$
  (VII) $8-8d+bd-c=0 \quad\Rightarrow\quad 8-8d+bd=c$ **1 pt**

- Aus (VI) und (VII):

  (VIII) $8-8d+bd=2+2b-5d \quad\Rightarrow\quad 6+bd=2b+3d$ **1 pt**

- (V) in (VII) einsetzen:

  $$6+(1+2d)d=2(1+2d)+3d$$
  $$2d^2-6d+4=0$$
  $$(d-2)(d-1)=0$$ **1 pt**

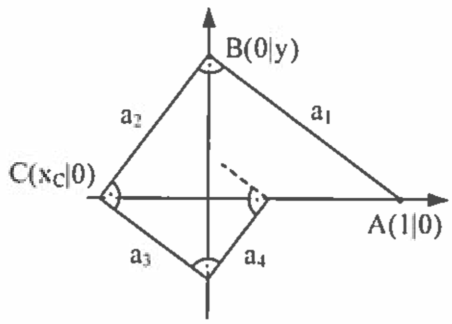
- Erste Lösung:

  $$d=1, b=3, c=3, a=2 \quad\Rightarrow\quad f(x)=\frac{2x^2+3x+3}{x+1}$$ **1 pt**

- Zweite Lösung:

  $$a=2, d=2, b=5, c=2$$
  $$\Rightarrow\quad f(x)=\frac{2x^2+5x+2}{x+2}=\frac{(2x+1)(x+2)}{x+2}=2x+1 \quad (\text{für } x\neq-2)$$
  entspricht nicht den vorgegebenen Bedingungen. **1 pt**

Aufgabe 4



- Strecke a_1:

$$a_1 = \sqrt{1^2 + y^2}$$ **1 pt**

- Mit Höhensatz oder Proportionen:

$$y^2 = |x_C| \cdot 1 \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{y} = \frac{y}{|x_C|} \quad \Rightarrow \quad |x_C| = y^2$$ **2 pt**

- Strecke a_2:

$$a_2 = \sqrt{y^2 + |x_C|^2} = \sqrt{y^2 + y^4} = y\sqrt{1 + y^2}$$ **1 pt**

- Konstante der Quotientenfolge:

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{y\sqrt{1+y^2}}{\sqrt{1+y^2}} = y$$ **1 pt**

- Länge der unendlichen Spirale:

$$L = \frac{a_1}{1-q} \quad \Rightarrow \quad 5 = \frac{\sqrt{1+y^2}}{1-y}$$ **2 pt**

$$\Rightarrow \quad 5(1-y) = \sqrt{1+y^2}$$

$$\Rightarrow \quad 25(1 - 2y + y^2) = 1 + y^2$$ **1 pt**

$$\Rightarrow \quad 24y^2 - 50y + 24 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 12y^2 - 25y + 12 = 0$$ **1 pt**

$$\Rightarrow \quad y = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 4 \cdot 144}}{24} = \frac{25 \pm \sqrt{49}}{24} = \frac{4}{3} \text{ oder } \frac{3}{4}$$

Da $y < 1$ sein muss, ist nur $y = \frac{3}{4}$ korrekt. **1 pt**