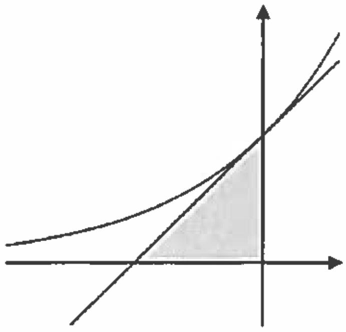
# ETH-Aufnahmeprüfung Herbst 2013

## Mathematik I (Analysis)



**Aufgabe 1 (5 + 5 + 5 Punkte)**

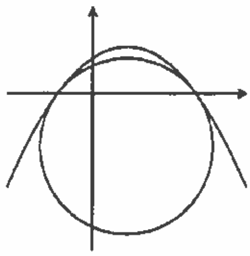
a) Auf dem Graphen der Funktion $f(x) = ae^{ax}$ $\left(a \in \mathbb{R}^+\right)$ wird im Schnittpunkt mit der y-Achse die Tangente gelegt. Diese definiert im 2. Quadranten zusammen mit den Koordinatenachsen ein Dreieck. Beweisen Sie, dass die Fläche des Dreiecks unabhängig von der Wahl von a ist.

b) Lösen Sie folgende Gleichung in $\mathbb{R}$: $25^{\log_4 2} = \cos^2(x) + 5\sin(x)$

c) Beweisen Sie, dass $n^3 - n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 6 teilbar ist.

**Aufgabe 2 (11 Punkte)**

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \sqrt{x - q}$ mit $q \in \mathbb{R}$. Der Funktionsbogen, welcher durch die Punkte $A(q|f(q))$ und $B(1+q|f(1+q))$ definiert ist, rotiert um die x-Achse bzw. um die y-Achse und erzeugt somit die Rotationsvolumen $V_x$ bzw. $V_y$. Bestimmen Sie q, so dass gilt: $V_x : V_y = 5 : 2$.
Für alle erhaltenen Lösungen skizzieren und beschreiben Sie die Rotationsvolumen.



**Aufgabe 3 (8 Punkte)**

Der Kreis mit Mittelpunkt M(2|-3) und Radius r = 5 berührt eine Parabel zweiten Grades in ihren Nullstellen. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Parabel.

**Aufgabe 4 (8 Punkte)**

Bestimmen Sie den Grundflächeradius des Kegels mit maximalem Volumen, welcher eine Manteloberfläche von 1 hat.

# Lösungen Mathematik I (Analysis) Herbst 2013

Die Note N berechnet sich für die Punktzahl p gemäss der Formel $N = 1 + \frac{p}{8}$, wobei auf halbe Noten zu runden ist (Viertelnote aufrunden).

---

**Aufgabe 1.a)**

- Ableitung: $f'(x) = a^2 e^{ax}$ **1 pt**
- Gleichung der Tangente: $y = mx + q$

  Steigung in $x = 0$: $m = f'(0) = a^2$ **1 pt**

  y-Achsenabschnitt: $q = f(0) = a$

  Gleichung der Tangente: $y = a^2 x + a$ **1 pt**
- Nullstelle der Tangente: $0 = a^2 x + a \quad \Rightarrow \quad x = -a^{-1}$ **1 pt**
- Fläche des Dreiecks: $A = \frac{1}{2} a \left| -a^{-1} \right| = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad$ QED **1 pt**

**Aufgabe 1.b)**

- Linker Term: $25^{\log_4 2} = 25^{0.5} = 5$ **1 pt**
- Rechter Term: $\cos^2(x)$ mit $1 - \sin^2(x)$ ersetzen.

  $5 = 1 - \sin^2(x) + 5\sin(x)$
  $0 = \sin^2(x) - 5\sin(x) + 4$ **1 pt**
- Klammeransatz (oder Substitution $y = \sin(x)$ und Lösungsformel der quadr. Gl.):

  $0 = (\sin(x) - 4)(\sin(x) - 1)$ **1 pt**
- $\sin(x) = 4$ (unmöglich) oder $\sin(x) = 1$ **1 pt**

  $\Rightarrow \quad x = \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi$ für $n \in \mathbb{Z}$ **1 pt**

**Aufgabe 1.c)**

- Induktionsverankerung

  $n=1: \quad n^3 - n = 1 - 1 = 0$ ist durch 6 teilbar. **1 pt**

- Induktionsvoraussetzung:

  $n^3 - n$ ist durch 6 teilbar.

- Induktionsschritt:

  $(n+1)^3 - (n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 = (n^3 - n) + 3n(n+1)$ **2 pt**

  Der erste Summand ist durch 6 teilbar (Induktionsvoraussetzung).

  Im zweiten Summanden ist entweder n oder (n + 1) gerade, also durch 2 teilbar; somit ist er sowohl durch 3 als auch durch 2 teilbar, also auch durch 6 teilbar. QED **2 pt**

**Die Aufgabe 1.c) kann auch ohne vollständige Induktion bewiesen werden:**

- Zerlegung des Terms in Faktoren:

  $n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n-1)(n+1)$ **2 pt**

- Von 3 aufeinander folgenden ganzen Zahlen ist sicher eine durch 2 teilbar, und auch sicher eine durch 3 teilbar. Somit ist das Produkt der drei Faktoren durch $2 \cdot 3 = 6$ teilbar. **3 pt**

**Aufgabe 2**

- Rotationsvolumen um die x-Achse:

$$V_x = \pi \int_q^{1+q} f^2(x)dx = \pi \int_q^{1+q} (x-q)dx = \pi\left[\tfrac{1}{2}x^2 - qx\right]_q^{1+q}$$

$$= \pi\left[\tfrac{1}{2}(1+q)^2 - q(1+q)\right] - \pi\left[\tfrac{1}{2}q^2 - q^2\right] = \tfrac{1}{2}\pi$$ **2 pt**

- Umkehrfunktion: $f^{-1}(x) = x^2 + q$ **1 pt**

- Integrationsgrenzen: $f(q) = 0,\ f(1+q) = 1$ **1 pt**

- Rotationsvolumen um die y-Achse:

$$V_y = \pi \int_{f(q)}^{f(1+q)} \left(f^{-1}(x)\right)^2 dx = \pi \int_0^1 (x^2+q)^2 dx = \pi \int_0^1 (x^4 + 2qx^2 + q^2)dx$$

$$= \pi\left[\tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{2}{3}qx^3 + q^2x\right]_0^1 = \pi\left[\tfrac{1}{5} + \tfrac{2}{3}q + q^2\right]$$ **2 pt**

[ Variante: $V_y = \pi\int_a^b x^2 |f'(x)| dx$ und Substitution $z = \sqrt{x-q}$ :

$$V_y = \pi \int_q^{1+q} x^2 \cdot \left|\frac{1}{2\sqrt{x-q}}\right| dx = \pi \int_0^1 \left(z^2+q\right)^2 dz = \pi\left[\tfrac{1}{5} + \tfrac{2}{3}q + q^2\right]$$ ]

- Verhältnis der zwei Rotationsvolumen: $V_x = \frac{5}{2}V_y$

$$\left[\tfrac{1}{2}\pi\right] = \tfrac{5}{2}\pi\left[\tfrac{1}{5} + \tfrac{2}{3}q + q^2\right]$$

$$\tfrac{1}{5} = \tfrac{1}{5} + \tfrac{2}{3}q + q^2$$

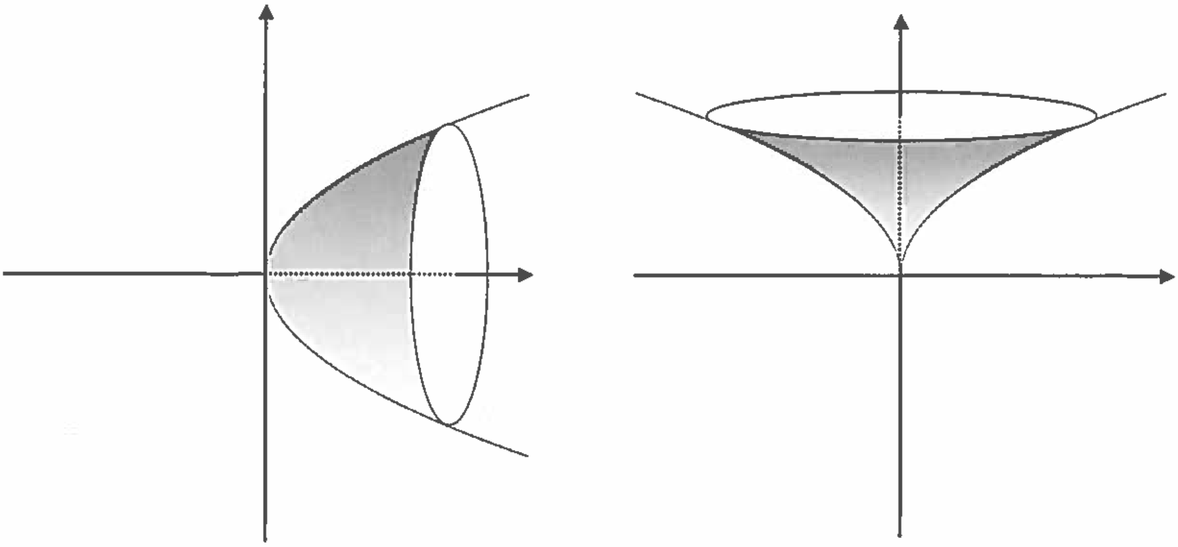
$$0 = q^2 + \tfrac{2}{3}q$$

$$0 = q(q + \tfrac{2}{3})$$ **2 pt**

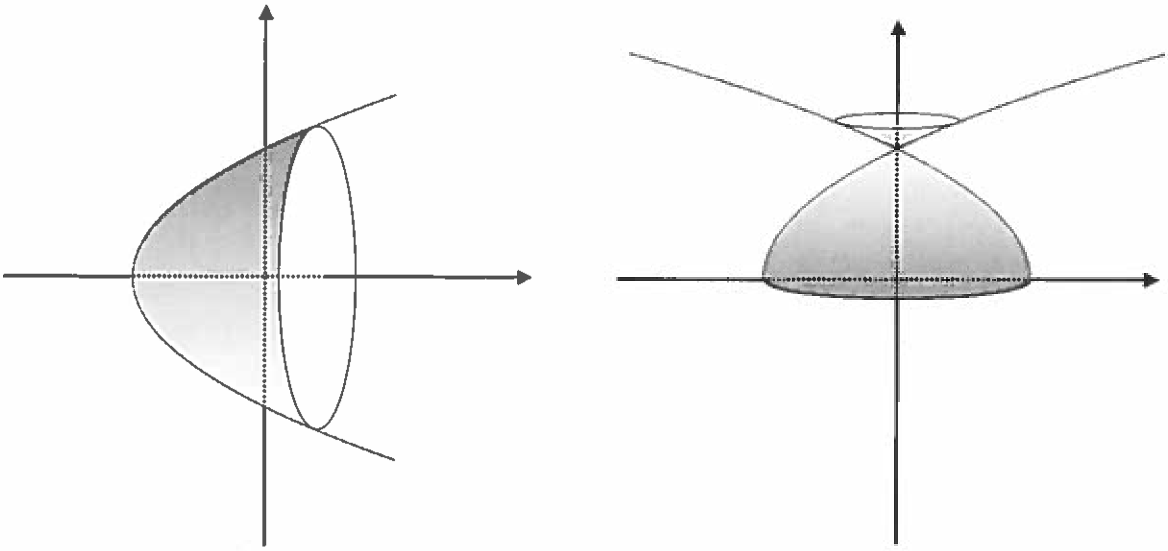
$\Rightarrow q = 0$ oder $q = -\frac{2}{3}$ **1 pt**

- $V_x$: Paraboloid; für $q = -\frac{2}{3}$ wird der Körper nach links verschoben.
  $V_y$: Kegel-ähnlicher Körper; für $q = -\frac{2}{3}$ besteht der Körper aus zwei Teilen, die in einer Kegelspitze zusammenhängen (Zeichnung siehe nächste Seite). **2 pt**

$q = 0$:



$q = -\frac{2}{3}$:



**Aufgabe 3**

- Sei $f(x) = ax^2 + bx + c$ die Funktionsgleichung der gesuchten Parabel.
- Ableitung: $f'(x) = 2ax + b$
- Der Kreis schneidet die x-Achse in $x = -2$ und $x = 6$ $\Rightarrow$ $f(6) = 0$ (I)
  $\Rightarrow$ $f(-2) = 0$ (II) **2 pt**
- Die Strecke *Kreismittelpunkt – rechte Nullstelle* hat die Steigung $m = \frac{3}{4}$:

  $f'(6) = -\frac{4}{3}$ (III) (oder analog dazu: $f'(-2) = \frac{4}{3}$) **2 pt**
- Aus (I), (II) und (III) folgt:

  $36a + 6b + c = 0$
  $4a - 2b + c = 0$
  $12a + b = -\frac{4}{3}$ (bzw. $-4a + b = \frac{4}{3}$) **2 pt**
- Es folgt: $a = -\frac{1}{6}$, $b = \frac{2}{3}$, $c = 2$ **2 pt**

**Aufgabe 4**

- Volumen: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
- Nebenbedingungen: $M = \pi r s = 1$ und $s^2 = h^2 + r^2$ **2 pt**
- Zielfunktion:

  $V(r) = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{s^2 - r^2} = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{\left(\frac{1}{\pi r}\right)^2 - r^2} = \frac{1}{3}\sqrt{r^2 - \pi^2 r^6}$ **2 pt**
- Lösung: $V'(r) = 0$

  $$0 = \frac{2r - 6\pi^2 r^5}{6\sqrt{r^2 - \pi^2 r^6}}$$ **2 pt**

  $\Rightarrow$ $2r = 6\pi^2 r^5$ $\Rightarrow$ $r = \sqrt[4]{\frac{1}{3\pi^2}}$ **2 pt**