ETH

Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Ecole polytechnique fédérale de Zurich
Politecnico federale di Zurigo

Rektorat

Schriftliche Aufnahmeprüfung **Frühling 2004**

MATHEMATIK (deutsch)

Kandidat.-Nr.

Name:

Vorname:

Die Resultate müssen den **vollständigen Lösungsweg** und **alle Zwischenresultate** enthalten.
Beschluss der Aufnahmeprüfungskommission vom 15.9.2000

1. Von einem Dreieck ABC kennt man die Koordinaten der Eckpunkte $A(6/-3)$ und $B(-\frac{3}{4}/6)$ sowie die Gleichung des Inkreises $k : x^2 + y^2 = 9$.
   a) Zeige, dass der Kreis k die Gerade g_{AB} berührt.
   b) Bestimme die Koordinaten der Ecke C.

2. Gegeben sind die Folgen
$$a_n = \frac{n+1}{2^n}, \quad s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$
   a) Berechne die Werte der Folgenglieder s_1, s_2, s_3, s_4.
   b) Für s_n existiert die explizite Darstellung
$$s_n = p - \frac{n+q}{2^n}.$$
   Bestimme p und q und beweise die Allgemeingültigkeit der Darstellung mit vollständiger Induktion.

3. Ein Kreiskegel mit Grundkreisradius $r = 12$ und Höhe $h = 16$ wird zentrisch durchbohrt (Bohrachse: Spitze-Grundkreismittelpunkt).
   a) Drücke die Gesamtoberfläche des gelochten Körpers durch den Bohrradius x aus.
   b) Welches Volumen hat der entstehende Körper, wenn der Bohrradius so gewählt wurde, dass die Gesamtoberfläche des gelochten Körpers maximal ist.

4. Gegeben sind die beiden Funktionen
$$f(x) = \sqrt{2\sin(x)}, \quad g(x) = \sqrt{1-\cos(x)}.$$
   a) Skizziere die Graphen im Bereich $D = [0, \pi]$ mit 2 cm Einheit.
   b) Die Graphen der Funktionen besitzen im Bereich D neben dem Ursprung einen weiteren Schnittpunkt S. Berechne dessen exakte x–Koordinate x_S.
   c) Die beiden Kurven begrenzen für $0 \leq x \leq x_S$ ein Flächenstück, welches man um die x–Achse rotieren lässt. Wie gross wird das Volumen des entstehenden Körpers (auf 2 Nachkommastellen)?

Dieses Blatt ist mit der Arbeit abzugeben!

Lösungen Mathematik schriftlich Frühling 2004

Für jede Aufgabe werden 10 Punkte erteilt, sodass ein Total von 40 Punkten erreicht werden kann.

---

1. a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -\frac{27}{4} \\ 9 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

   $c : 4x + 3y - 15 = 0$

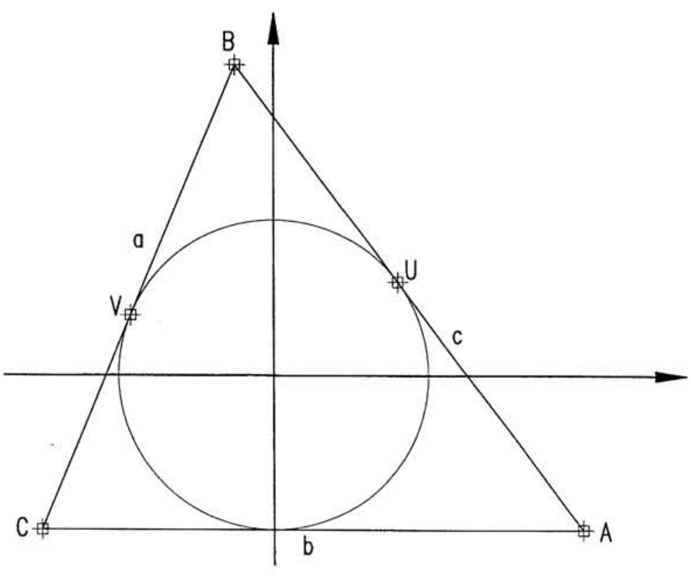
   $d(M(0/0), c) = \left| \frac{4}{5} \cdot 0 + \frac{3}{5} \cdot 0 - \frac{15}{5} \right| = 3 \quad \checkmark$ 3P

   b) Polare bzg. B: $-\frac{3}{4}x + 6y = 9 \Rightarrow x = 8y - 12$

   Einsetzen in die Kreisgleichung: $(8y-12)^2 + y^2 = 9 \Rightarrow 65y^2 - 192y + 135 = 0$

   $\Rightarrow y_{1,2} = \frac{9}{5}, \frac{15}{13} \Rightarrow V\left(-\frac{36}{13}, \frac{15}{13}\right)$ 4P

   $\left| \begin{array}{lrcr} a: & -\frac{36}{13}x + \frac{15}{13}y & = & 9 \\ b: & y & = & -3 \end{array} \right| \Rightarrow x = -\frac{9}{2} \Rightarrow \underline{\underline{C(-4.5/-3)}}$ 3P



2. a) $(a_n) = 1, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{5}{16}$

$(s_n) = 1, \frac{7}{4}, \frac{9}{4}, \frac{41}{16}$ 2P

b) $n = 1 : p - \dfrac{1+q}{2} = 1 \quad (1)$

$n = 2 : p - \dfrac{2+q}{4} = \dfrac{7}{4} \quad (2)$

$(1)\&(2) \Rightarrow \underline{\underline{p = 3, q = 3}}$ 3P

Beweis:

Verankerung ($n = 1$): $3 - \dfrac{1+3}{2} = 1\checkmark$

Voraussetzung: $s_n = 3 - \dfrac{n+3}{2^n}$

zu zeigen: $s_{n+1} = 3 - \dfrac{n+4}{2^{n+1}}$

Beweis: $s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \overset{\text{Vorauss.}}{=} 3 - \dfrac{n+3}{2^n} + \dfrac{n+2}{2^{n+1}} = 3 - \dfrac{2n+6-n-2}{2^{n+1}} = 3 - \dfrac{n+4}{2^{n+1}}$ 5P

3. a) $S = \pi\bar{s}(r + x) + \pi r^2 - \pi x^2 + 2\pi x\bar{h}$ 2P

Nebenbedingungen:

$s = \sqrt{144 + 256} = 20$

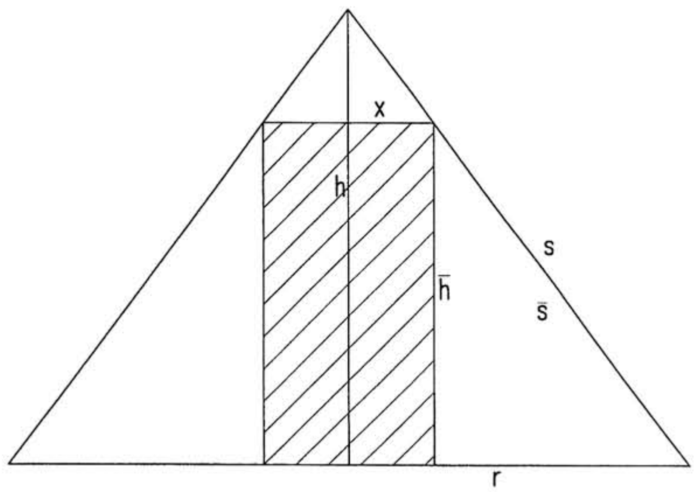
$s : r = (s - \bar{s}) : x \Rightarrow \bar{s} = 20 - \frac{5}{3}x$

$h : r = (h - \bar{h}) : x \Rightarrow \bar{h} = 16 - \frac{4}{3}x$

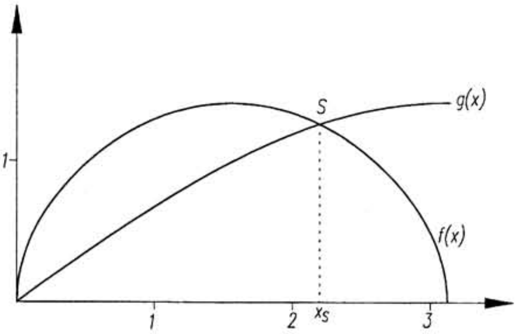
$\Longrightarrow S = \pi\left(384 + 32x - \frac{16}{3}x^2\right)$ 4P

b) $S' = \pi\left(32 - \frac{32}{3}x\right) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x = 3, \quad \bar{h} = 12$ 2P

$V = \frac{\pi \cdot 12}{3}(144 + 9 + 36) - \pi \cdot 9 \cdot 12 = \underline{\underline{648\pi}}$ 2P



4. a)



2P

b)

$$
\begin{aligned}
\sqrt{2\sin x} &= \sqrt{1-\cos x} \\
2\sin x &= 1-\cos x \\
2\sqrt{1-\cos^2 x} &= 1-\cos x \\
4-4\cos^2 x &= 1-2\cos x+\cos^2 x \\
5\cos^2 x-2\cos x-3 &= 0 \\
\cos x &= \begin{cases} 1 & \Rightarrow x=0 \\ -\frac{3}{5} & \Rightarrow \underline{\underline{x_S=\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)}} \approx 2.21 \end{cases}
\end{aligned}
$$

4P

c)

$$
\begin{aligned}
V &= \pi\int_0^{x_S}\left(f^2(x)-g^2(x)\right)\,dx \\
&= \pi\int_0^{x_S}(2\sin x)-1+\cos x)\,dx \\
&= \pi\Big[-2\cos x-x+\sin x\Big]_0^{x_S} \approx \underline{\underline{5.61}}
\end{aligned}
$$

4P