ETH

Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Ecole polytechnique fédérale de Zurich
Politecnico federale di Zurigo

Rektorat

Schriftliche Aufnahmeprüfung **Herbst 2003**

MATHEMATIK (deutsch)

Kandidat.-Nr.

Name:

Vorname:

Die Resultate müssen den **vollständigen Lösungsweg** und alle **Zwischenresultate** enthalten.
Beschluss der Aufnahmeprüfungskommission vom 15.9.2000

1. Gegeben ist eine Ellipse mit Halbachsen $a = 5$ und $b = 3$ in Normallage (Mittelpunkt $(0/0)$, Achsen auf den Koordinatenachsen). Für welche Punkte C auf der Ellipse ist der Flächeninhalt des Dreiecks $A(0/-3)B(5/0)C$ gleich 6?

2. Entscheiden Sie durch Rechnung, ob beim Vorhandensein des undurchsichtigen Dreiecks $A(0/0/0)B(6/9/3)C(4/2/10)$ der Punkt $Q(-2/4/5)$ vom Punkt $P(10/4/7)$ aus sichtbar ist.

3. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \cos(2x)$ im Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

   a) Skizzieren Sie mit 4 cm Einheit den Graphen der Funktion f.

   b) Der Graph und die Normalen in den beiden Nullstellen der Funktion schliessen ein Gebiet ein. Bestimmen Sie dessen Inhalt.

   c) In dieses Gebiet wird ein achsenparalleles Rechteck mit möglichst grossem *Umfang* einbeschrieben. Berechnen Sie diesen maximalen Umfang.

4. Gegeben ist in der komplexen Ebene die Abbildung

$$f(z) = \frac{1+i}{z}.$$

   a) Berechnen Sie $f(i)$ und $f(3-i)$. Geben Sie die Resultate in Normalform an.

   b) Berechnen Sie die Lösungen der Gleichung $f(z) = z$ (Resultate in Normalform).

   c) Zeigen Sie, dass gilt: $f(f(z)) = z$.

   d) Welches Bild hat die Gerade g mit der üblichen Koordinatengleichung $g : y = x + 1$ unter dieser Abbildung?

Dieses Blatt ist mit der Arbeit abzugeben

Lösungen Mathematik schriftlich Herbst 2003

Für jede Aufgabe werden 10 Punkte erteilt, sodass ein Total von 40 Punkten erreicht werden kann.

---

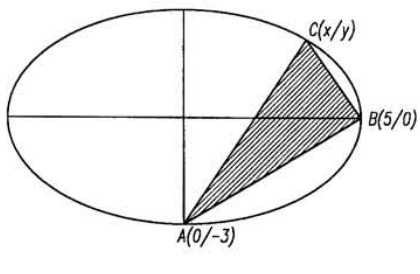
1. $F_{ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}x\\y+3\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}(5y + 15 - 3x) \qquad (1)$ 3P

   Ellipsengleichung: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow y = \pm\frac{3}{5}\sqrt{25 - x^2} \qquad (2)$ 2P

   (2) in (1):

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(\pm 3\sqrt{25 - x^2} + 15 - 3x\right) &\overset{!}{=} 6\\ \pm\sqrt{25 - x^2} &= x - 1\\ 25 - x^2 &= x^2 - 2x + 1\\ x^2 - x - 12 &= 0\\ x_{1,2} &= \begin{cases} 4\\ -3\end{cases}\end{aligned}$$ 3P

   Mit Beachtung der Vorzeichen folgt: $\underline{\underline{C_1(4|\frac{9}{5})}}$, $\underline{\underline{C_2(-3|-\frac{12}{5})}}$ 2P



2. Ebenengleichung $\mathbb{E}_{ABC}$:

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 84 \\ -48 \\ -24 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \mathbb{E} : 7x - 4y - 2z = 0$ 3P

Gerade g_{PQ}:

$$g_{PQ} : \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ 1P

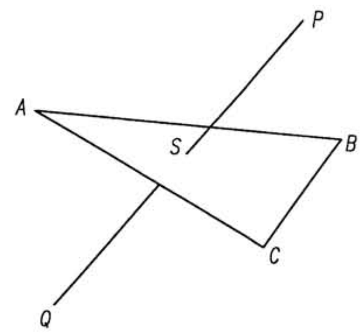
Durchstosspunkt $S = g_{PQ} \cap \mathbb{E}$:

$$\begin{aligned} 7(10 + 6\lambda) - 4 \cdot 4 - 2(7 + \lambda) &= 0 \\ 40\lambda + 40 &= 0 \\ \lambda &= -1 \end{aligned}$$

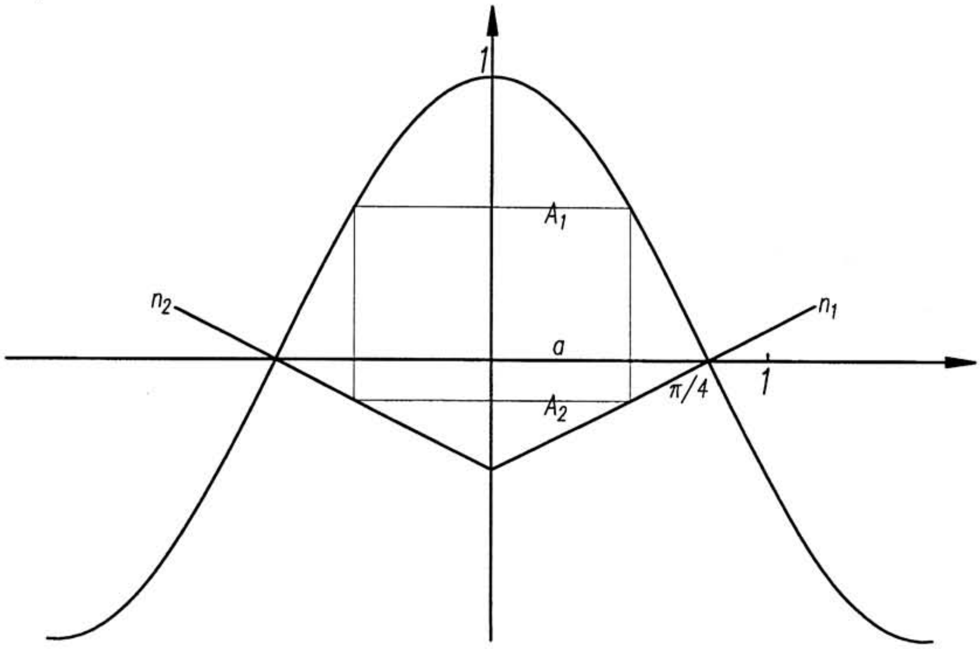
$\Rightarrow S(4/4/6)$ 2P

$$\overrightarrow{AS} = u\overrightarrow{AB} + v\overrightarrow{AC} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = u \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} \Longrightarrow u = \frac{1}{3},\ v = \frac{1}{2}$$ 2P

Aus $u + v < 1$ oder mit Zeichnung folgt:
S liegt innerhalb des Dreiecks ABC, also ist Q von P aus **nicht sichtbar**. 2P



3. a)



2P

b) Nullstellen: $\pm\dfrac{\pi}{4}$

Gleichung der Normalen:
$f'(x) = -2\sin(2x),\ f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2 \Longrightarrow$ Steigung von $n_1 : m = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow$

$$n_1 : y = \frac{1}{2}x - \frac{\pi}{8}$$
$$n_2 : y = -\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{8}$$

1P

Flächeninhalt:

$$\frac{1}{2}A = A_1 + A_2$$
$$A_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x)dx = \left[\frac{1}{2}\sin(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}$$
$$A_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{8}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{64}$$
$$\underline{\underline{A = 1 + \frac{\pi^2}{32} \approx 1.31}}$$

3P

c) $\dfrac{1}{2}U(a) = 2a + \cos(2a) - \left(\dfrac{1}{2}a - \dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{3}{2}a + \cos(2a) + \dfrac{\pi}{8}$ 2P

$\dfrac{1}{2}U'(a) = \dfrac{3}{2} - 2\sin(2a) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \sin(2a) = \dfrac{3}{4} \Rightarrow a_{\max} \approx 0.42$ 1P

$\underline{\underline{U_{\max}}} = 3a_{\max} + 2\cos(2a_{\max}) + \dfrac{\pi}{4} \approx \underline{\underline{3.38}}$ 1P

4. a) $f(i) = \dfrac{1+i}{i} = \underline{\underline{1-i}}$ 1P

$f(3-i) = \dfrac{1+i}{3-i} \cdot \dfrac{3+i}{3+i} = \underline{\underline{\dfrac{1}{5} + \dfrac{2}{5}i}}$ 1P

b) $\dfrac{1+i}{z} = z \Longrightarrow z^2 = 1 + i = \sqrt{2}(\cos(45°) + i\sin(45°))$

$z_1 = \sqrt{\sqrt{2}}(\cos(22.5°) + i\sin(22.5°)) \approx \underline{\underline{1.10 + 0.46i}}$

$z_2 = \sqrt{\sqrt{2}}(\cos(202.5°) + i\sin(202.5°)) \approx \underline{\underline{-1.10 - 0.46i}}$ 2P

c) $f(f(z)) = f\left(\dfrac{1+i}{z}\right) = \dfrac{1+i}{\frac{1+i}{z}} = z$ 2P

d) $f(x+iy) = \dfrac{1+i}{x+iy} = \dfrac{x+y+i(x-y)}{x^2+y^2}$

$\Longrightarrow$Abbildungsgleichungen:
$u = \dfrac{x+y}{x^2+y^2}, \quad v = \dfrac{x-y}{x^2+y^2}$

Aus c) oder durch Auflösen obiger Gleichungen nach x, y folgen die Abbildungsgleichungen der Umkehrabbildung:
$x = \dfrac{u+v}{u^2+v^2}, \quad y = \dfrac{u-v}{u^2+v^2}$

Für das Bild von $g : y = x + 1$ folgt dann
$\bar{g} : \dfrac{u-v}{u^2+v^2} = \dfrac{u+v}{u^2+v^2} + 1 \Rightarrow u^2 + v^2 + 2v = 0 \Rightarrow u^2 + (v+1)^2 = 1$

Das Bild von g ist also ein Kreis mit Mittelpunkt $M(0/-1)$ und Radius 1. 4P