

Schriftliche Aufnahmeprüfungen **Frühjahr 2002**

**MATHEMATIK** (deutsch)

Die Resultate müssen den **vollständigen Lösungsweg** und **alle Zwischenresultate** enthalten.

(*Beschluss der Aufnahmeprüfungskommission vom 15.9.2000*)

1. Für welche reellen Zahlen  $a$  gilt für die Funktionen

$$f : x \mapsto x^2 + x + 1 \quad \text{und} \quad g : x \mapsto a \cdot x - 1$$

die Gleichheit  $\int_0^1 f[g(x)] dx = \int_0^1 g[f(x)] dx$  ?

2. Spiegle den Koordinatenursprung  $O(0|0)$  an der Geraden  $g : y = -\frac{12}{5}x + 13$  in den Punkt  $O^*$ . Wie lauten seine Koordinaten exakt ?

Gib ebenfalls die Punkte  $A, B$  auf der Geraden  $g$  an, sodass  $OAO^*B$  ein Quadrat bilden. Überprüfe die Resultate in einer Zeichnung mit 1 cm Einheit.

3. Im Intervall  $0 \leq x \leq \pi$  soll der Kurve  $y = 3 \cdot \sin(x)$  ( $x$  im Bogenmass) ein Rechteck  $ABCD$  so einbeschrieben werden, dass die Seite  $AB$  mit der  $x$ -Achse zusammenfällt und die Ecken  $C, D$  auf der gegebenen Kurve liegen.

Wie lauten (auf 4 Kommastellen genau) die Koordinaten der Eckpunkte des Rechtecks mit grösstem Umfang und wie gross wird dieser ?

4. a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Quersumme einer natürlichen Zahl (=Summe ihrer Ziffern) im Intervall  $11 \leq x \leq 61$  eine Primzahl (2, 3, 5, 7, ...) ?

Ist die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses unter den Primzahlen des betrachteten Intervalles grösser ?

Wie lauten aber die entsprechenden Antworten für das Zahlenintervall  $12 \leq x \leq 59$  ?

- b) Unter Verwendung der Formeln  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$  und  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$  soll untersucht werden, wann genau der Mittelwert  $\bar{x}$  der Zahlen 1, 2, 3, ...,  $n$  grösser, gleich oder kleiner als ihre Varianz  $s^2$  ist, wenn diese für eine beliebige Messreihe  $x_1, x_2, \dots, x_n$  in bekannter Weise nach der Methode  $s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2$  berechnet wird ?

Lässt sich ebenfalls eine Aussage über die Grössenbeziehung zwischen  $\bar{x}$  and  $s$  machen ?