

**ETH**

Eidgenössische Technische Hochschule Zürich  
Ecole polytechnique fédérale de Zurich  
Politecnico federale di Zurigo

Schriftliche Aufnahmeprüfungen **Herbst 2001**

**MATHEMATIK** deutsch

Die Resultate müssen den **vollständigen Lösungsweg** und **alle Zwischenresultate** enthalten.  
(*Beschluss der Aufnahmeprüfungskommission vom 15.9.2000*)

1. Bestimme exakt das Zentrum  $Z(x_Z|y_Z)$  und den Radius  $r$  des Kreises, welcher durch den Koordinatenursprung  $O(0|0)$  verläuft und die Gerade  $g : y = \frac{2}{3}x + 2$  im Punkt  $B(3|4)$  berührt. Kontrolliere die Rechnungen durch eine Konstruktion mit 1 cm Einheit.

2. Bei einem Reinigungsverfahren von Metall kann man durch einen einzelnen Prozess 25 % (= *Wirkungsgrad*) der Fremdstoffe eliminieren.

Wieviele Prozesse benötigt man, um das betreffende Metall mit 85 % Reinheit auf eine solche von 99.9 % zu bringen ?

Wie hoch müsste der *Wirkungsgrad* eines modernen Reinigungsverfahrens sein, damit man sich mit bloss 12 Prozessen begnügen kann ?

3. Zeige, dass die Kurve mit der Gleichung  $y = x - 2 \cdot \sqrt{x} + 1$  beide Koordinatenachsen berührt, und berechne den Flächeninhalt des so durch Kurve und Koordinatenachsen begrenzten endlichen Gebietes.

Bestimme dann an einer beliebigen Stelle  $x = c$  die Gleichung der Kurventangente und beweise, dass deren beide Achsenabschnitte addiert stets den gleichen (von der Wahl von  $c$  unabhängigen) Wert ergeben.

Überprüfe die Rechnungen in einer sorgfältigen Skizze mit 2 cm Einheit.

4. a) Man wirft zwei ideale Spielwürfel. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Summe der erreichten Augenzahlen durch deren Differenz ohne Rest teilbar, wenn die Zahl Null als Teiler nicht zugelassen wird ?

- b) Charles besitzt einen Jeton, der auf einer Seite weiss, auf der anderen Seite schwarz gefärbt ist, und schlägt seinem Vater folgendes Spiel vor:

*Du legst 16 Einfränker auf den Tisch und ich werfe meinen Jeton genau so lange, bis erstmals die weisse Seite sichtbar ist. Triffst dies schon beim ersten Wurf zu, so gewinne ich 16 Franken. Wenn ich zwei Züge brauche, erhalte ich bloss noch 8 Franken, bei drei Würfeln nur noch die Hälfte (also 4 Franken), bei vier Würfeln noch 2 Franken, und wenn ich erst im fünften und letzten Wurf die weisse Jetonseite oben habe, muss ich mich mit bloss 1 Franken zufrieden geben. Wie gross ist für Charles bei diesem Spiel der mittlere Gewinn ?*

Wie lautet die entsprechende Rechnung für Charles' Erwartungswert beim geschilderten Spiel, wenn der Vater  $2^n$  ( $n \geq 5$ ) Einfrankenstücke zur Verfügung stellt und nach höchstens  $n + 1$  Jetonwürfen „Spielende“ ist ?