MMPII

ETH Zurich

Annina Lieberherr
Janik Schuettler
edit: Jakob Günther

FS19

Inhaltsverzeichnis

1 Gruppen

1.1 Definition

Def'n 1.1 (Gruppe) *ist eine Menge G mit einer Abbildung $\cdot : G \times G \to G$, so dass:*

i) $\forall g_1, g_2, g_3 \in G : (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3)$

ii) $\exists 1 \in G : \forall g \in G : 1 \cdot g = g \cdot 1 = g$ *(Einselement ist eindeutig)*

iii) $\forall g \in G\ \exists g^{-1} \in G : gg^{-1} = g^{-1}g = 1$ *(Inverses Element ist eindeutig)*

Def'n 1.2 (Abelsche Gruppen) $gh = hg\ \forall g, h \in G$.

Def'n 1.3 (Untergruppe) *H von Gruppe $G \supset H \neq \varnothing$ ist selbst wieder eine Gruppe.*

Def'n 1.4 (Normalteiler) *ist Untergruppe H von Gruppe G, falls zusätzlich $\forall g \in G, h \in H : ghg^{-1} \in H$. Also sind abelsche Untergruppen Normalteiler.*

Def'n 1.5 (Gruppenordnung) *$|G|$ ist die Anzahl Elemente in G (kann auch ∞ sein).*

Def'n 1.6 (Elementordnung) *von $g \in G$ ist die kleinste Zahl n (oder ∞), für die $g^n = 1$ (= Ordnung der von g erzeugten Untergruppe).*

Remark 1.7 *Die Ordnung einer Untergruppe teilt die Ordnung der Gruppe (Satz von Lagrange) $\implies$ die Ordnung jedes Elements teilt $|G|$. Jede Gruppe mit $|G| = p$, p Primzahl, ist isomorph zu $\mathbb{Z}_p$.*

1.2 Operationen auf Gruppen

Def'n 1.8 (Produktgruppe) *$G \times H$ von Gruppen G, H ist wieder eine Gruppe mit Multiplikation $(g, h) \cdot (g', h') = (gg', hh')$, $1_{G\times H} = (1_G, 1_H)$, $(g, h)^{-1} = (g^{-1}, h^{-1})$.*

Def'n 1.9 (Gruppenhomomorphismus) *von Gruppen G, H ist Abbildung $f : G \to H$ s.d. $\forall g_1, g_2 : f(g_1 \cdot g_2) = f(g_1)f(g_2)$. f ist Isomorphismus, falls f eine Bijektion ist $\implies G, H$ isomorph.*

Remark 1.10 *Sei H eine Gruppe. Dann ist $\mathrm{Aut}(H) = \{f : H \to H, f \text{ Gruppenisom.}\}$ wieder eine Gruppe.*

Theorem 1.11 *Sei $f : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Dann gilt:*

i) $f(1_G) = 1_H$ *und* $f(g)^{-1} = f(g^{-1})$

ii) $\ker f = \{g \in G | f(g) = 1_H\} \subset G$ *ist ein Normalteiler*
$\mathrm{im} f = \{f(g) | g \in G\} \subset H$ *ist eine Untergruppe*

iii) *f injektiv $\Leftrightarrow \ker f = \{1\}$ und f bijektiv $\Leftrightarrow \ker f = \{1\}$ und $\mathrm{im} f = H$*

Def'n 1.12 (Linksnebenklassen) *von H in G ($H \subset G$ Untergruppe) sind die Mengen $gH := \{gh | h \in H\}$, $\forall g \in G$. Die Menge aller Linksnebenklassen, ${}^{G}/_{H}$, ist im Allgemeinen keine Gruppe. (Analog für Rechtsnebenklassen)*

Remark 1.13 *$|gH| = |H|$ und falls für $g_1, g_2 \in G$ gilt $g_1^{-1}g_2 \in H \implies g_1H = g_2H$*

Lemma 1.14 (Quotienten sind Gruppen) *Sei $H \subset G$ ein Normalteiler. Dann gilt: $gH = Hg\ \forall g \in G$ und ${}^{G}/_{H}$ bildet eine Gruppe mit Multiplikation $gH \cdot g'H = (gg')H$, Einselement 1_GH und Inverse $(gH)^{-1} = g^{-1}H$. Man nennt die Gruppe **Quotientengruppe**.*

Def'n 1.15 (Semidirektes Produkt) *$G \rtimes_\rho H$ von Gruppen G, H mit Gruppenhom. $\rho : G \to \mathrm{Aut}(H)$ (G operiert auf H) ist die Menge $G \times H$ mit Multiplikation $(g, h) \cdot (g', h') = (gg', h\rho_g(h'))$.*
Das neutrale Element ist $(1_G, 1_H)$ und die Inverse ist $(g, h)^{-1} = (g^{-1}, \rho_{g^{-1}}h^{-1})$.

Remark 1.16 *Bsp. Semidirektes Produkt: Bewegungsgruppe im $\mathbb{R}^3$: $G = O(3)$, $H = (\mathbb{R}^3, +)$ und $\rho(A)(b) = Ab$ für $A \in O(3), b \in \mathbb{R}^3$.*

1.3 Erzeugende und Relationen

Def'n 1.17 (Freie Gruppe) *$\mathcal{F}(S)$ ist die von der Menge der Erzeugenden/Generatoren S erzeugte Menge der Worte in Symbolen s, s^{-1} für $s \in S$, modulo der Relation, dass benachbarte Symbolpaare $ss^{-1}, s^{-1}s$ aus dem Wort entfernt werden dürfen. Die Multiplikation ist die Aneinanderreihung von Worten.*

Def'n 1.18 (Präsentation) *Sei $R \subset \mathcal{F}(S)$ eine Teilmenge von Relationen. Sei $\langle R \rangle \subset \mathcal{F}(S)$ der kleinste Normalteiler, der R enthält. Dann ist die von S erzeugte Gruppe mit Relationen R der Quotient ${}^{\mathcal{F}(S)}/_{\langle R \rangle}$. Man nennt die Daten S, R **Präsentation** der Gruppe.*

1.4 Beispiele

Zyklische Gruppe: $C_n = \mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z}_n$ für $n = 1, 2, 3, ...$

Diedergruppe D_n: $|D_n| = 2n$ ($n \geq 3$): orthonormale Transformationen des $\mathbb{R}^3$, die ein reguläres n-gon auf sich selbst abbilden. Sei S die Spiegelung, R die Rotation um $\frac{2\pi}{n}$. Dann ist $D_n = \{1, R, \dots, R^{n-1}, S, RS, \dots, R^{n-1}S\}$. D_n wird erzeugt von R, S mit Relationen $R^n = S^2 = (SR)^2 = 1$. Es gilt $(SR^i)^2 = 1$ und $(R^iS^j)^{-1} = S^jR^{n-j}$

Symmetrische Gruppe: $|S_n| = n!$: Permutationen von $\{1, \dots, n\}$.

Oktaeder Gruppe: Isometrien, die einen Oktaeder (oder Würfel) wieder auf sich selber abbilden. $\tilde{O} = O \cap SO(3) \cong S_4$; $O \cong \tilde{O} \times \mathbb{Z}_2$, $|O| = 48$, 10 Konjugationsklassen. Elemente: $1, 6[r_4], 3[r_2], 8[r_3], 6[r_2'], [I], 3[\tau], 6[\tau'], 6[s_4], 8[s_6]$. TODO

2 Darstellungen und Wirkung einer Gruppe

2.1 Wirkung

Def'n 2.1 (Gruppenwirkung) *einer Gruppe G auf Menge S ist ein Gruppenhomomorphismus $\rho : G \to bij(S)$ (Menge der Bijektionen auf S), d.h. man hat eine Abbildung $G \times S \to S, (g, s) \mapsto \rho_g(s)$, so dass $\rho_g(\rho_h(s)) = \rho_{g \cdot h}(s)$. Notation: $g \cdot s := \rho_g(s)$.*

Def'n 2.2 (Bahn) *von $s \in S$ bzgl. Wirkung von Gruppe G ist $Gs = \{g \cdot s | g \in G\}$.*

Def'n 2.3 (Stabilisator) *von Menge S bzgl. Wirkung von Gruppe G ist $\mathrm{Stab}_S = \{g \in G | g \cdot s = s\}$.*

Theorem 2.4 (Bahn-Stabilisator) *Sei G eine endliche Gruppe, die auf die endliche Menge S wirkt, und sei $s \in S$. Dann gilt $|G| = |\mathrm{Stab}_S||G \cdot s|$.*

2.2 Darstellungen

Def'n 2.5 (Darstellung) *einer Gruppe G auf Vektorraum $V \neq 0$ ist ein Gruppenhom. $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$.*

Def'n 2.6 (Darstellungshomomorphismus) *von Darstellungen ρ, ρ' von G auf V, V' ist $f \in Hom(V, V')$, s. d. $\forall g \in G : f \circ \rho(g) = \rho'(g) \circ f$ (**G-äquivariant**). $\mathrm{Hom}_G(V, V')$ ist die Menge solcher Abbildungen. Ist f invertierbar, so nennt man ρ, ρ' **isomorph (äquivalent)**.*

2.3 Operationen auf Darstellungen

Def'n 2.7 (Duale Darstellung) *Sei $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ eine Darstellung von G. Dann ist die **duale Darstellung** $\rho^* : G \to \mathrm{GL}(V^*)$ auf den Dualraum V^* gegeben durch $(\rho_g^*(l))(x) = l(\rho_{g^{-1}}(x))$ für $l \in V^*$, $x \in V$.*

Remark 2.8 *Für Matrizen gilt $\rho_g^* = \rho_g^{-T}$.*

Def'n 2.9 (Direkte Summe, Tensorprodukt von Darstellungen) *Seien $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$, $\rho' : G \to \mathrm{GL}(V')$ Darstellungen. Dann definieren wir die **direkte Summe** $\rho \oplus \rho'$ auf $V \oplus V'$ durch $(\rho \oplus \rho')_g(v + v') = \rho_g(v) + \rho_g'(v')$, sowie das **Tensorprodukt** $\rho \otimes \rho'$ auf $V \otimes V'$ durch $(\rho \otimes \rho')_g(v \otimes v') = \rho_g(v) \otimes \rho_g'(v')$.*

2.4 Irreduzible und vollständig reduzible Darstellungen

Def'n 2.10 (Invarianter Unterraum) *ist ein Unterraum $W \subset V$ bzgl. einer Darstellung (ρ, V) von G, falls $\rho(g)(w) \in W$ für alle $w \in W$.*

Def'n 2.11 (Irreduzible Darstellung) *(ρ, V) von Gruppe G hat nur die trivialen invarianten Unterräume $V, \varnothing$.*

Def'n 2.12 (Vollständig reduzibel) *ist eine Darstellung (ρ, V) von Gruppe G, falls sie isomorph zu direkter Summe von (beliebig vielen) irreduziblen Darstellungen ist.*

Lemma 2.13 (Irreps $\implies$ endl.dim. V) *Sei G eine endliche Gruppe, $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ eine irred. Darstellung. Dann ist V endlich dimensional.*

Theorem 2.14 (Endl.dim. G,V $\implies$ vollst.red.) *Sei G eine endliche Gruppe und sei V eine endlich dim. Darstellung von G über $\mathbb{R}, \mathbb{C}$. Dann ist V vollst. reduzibel.*

2.5 Unitäre Darstellungen

Def'n 2.15 (Unitäre Darstellung) *Eine Darstellung $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ auf V mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ heisst **unitär**, falls $\rho(g)$ unitär ist für alle $g \in G$, also $\langle v, w \rangle = \langle \rho(g)v, \rho(g)w \rangle$.*

Lemma 2.16 (Komplement ist invariant) *Sei $G \to \mathrm{GL}(V)$ eine unitäre Darstellung und sei $W \subset V$ ein invarianter Unterraum. Dann ist $W^\perp$ auch invariant.*

Korollar 2.17 (V unitär $\implies$ vollst.red.) *Unitäre Darstellungen auf endlich dim. Vektorräumen sind vollständig reduzibel.*

Theorem 2.18 (Existenz unitäres Skalarprodukt) *Sei $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ eine (endlich dim.) Darstellung der endlichen Gruppe G. Dann existiert ein Skalarprodukt auf V bzgl. dessen die Darstellung unitär ist.*

2.6 Das Lemma von Schur

Theorem 2.19 (Schur) *Sei $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$, $\rho' : G \to \mathrm{GL}(V')$ Irreps, $f \in \mathrm{Hom}_G(V, V')$.*

(i) Dann ist entweder $f = 0$ oder f ist ein Isomorphismus.

(ii) Ist $V = V'$ ein endlich dim. komplexen Vektorraum, so gilt $f = \lambda\, \mathrm{Id}_V$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$.

Korollar 2.20 (Reduzibel, abelsch = 1D) *Jede irreduzible endlich. dim. komplexe Darstellung V einer abelschen Gruppe ist eindimensional.*

Theorem 2.21 (Anzahl Eigenwerte) *: Sei (ρ, V) eine Darstellung von Gruppe G, $A \in \mathrm{Hom}_G(V, V)$ und $V = \bigoplus_{j=1}^{n} V_j$ die Zerlegung in Irreps. Dann hat A in Diagonalbasis die Form $A = diag(\lambda_1, ..., \lambda_1, ..., ..., \lambda_n, ...\lambda_n)$, wobei der i. Eigenwert $d_i = dim(V_i)$ mal vorkommt ($\to$ A hat max. n Eigenwerte).*

2.7 Charaktere von Darstellungen

Def'n 2.22 (Charakter) *Sei $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ eine Darstellung auf dem endl. dim. Vektorraum V. Dann nennt man die Abbildung $\chi_V : G \to \mathbb{K}, g \mapsto \chi_V(g) := \mathrm{tr}(\rho(g))$ den **Charakter** der Darstellung ρ.*

Def'n 2.23 (Konjugationsklasse) *C_g zu $g \in G$ ist definiert als $\{hgh^{-1} | h \in G\}$ (Für G abelsch: $C_g = \{g\} \forall g \in G$.*

Remark 2.24 (Eigenschaften Charakter) *Der Charakter ist eine Klassenfunktion, d.h. konstant auf Konjugationsklassen. Die Charaktere zweier isomorpher Darstellungen sind gleich. $\dim V = \chi_V(1)$. $\chi_{V \oplus V'} = \chi_V + \chi_{V'}$ und $\chi_{V \otimes V'} = \chi_V \cdot \chi_{V'}$. Sei die Darstellung unitär, dann $\chi_V(g^{-1}) = \overline{\chi_V(g)} = \chi_{V^*}(g)$.*

3 Darstellungstheorie endlicher Gruppen

Sei im Folgenden G eine endliche Gruppe. Wir betrachten generell $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

3.1 Orthogonalität der Matrixelemente

Definiere für Funktionen $f, \tilde{f} : G \to \mathbb{K}$ das Skalarprodukt $\langle f, \tilde{f} \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{f}(g) \tilde{f}(g)$.

Theorem 3.1 (Orthogonalität der Matrixelemente) *Seien $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$, $\rho' : G \to \mathrm{GL}(V')$ irreduzible unitäre Darstellungen der Gruppe G. Seien $\rho(g)_{ij}$ bzw. $\rho'(g)_{ij}$ die Matrixelemente bzgl. beliebig gewählter ONB von V, V'. Dann gilt für alle i, j, k, l, dass $\langle \rho_{ij}, \rho_{kl}' \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\rho(g)_{ij}} \rho'(g)_{kl} = 0$ für ρ, ρ' inäquivalent, und $\langle \rho_{ij}, \rho_{kl} \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\rho(g)_{ij}} \rho(g)_{kl} = \frac{1}{\dim V} \delta_{ik} \delta_{jl}$.*

Korollar 3.2 (1. Orthogonalitätsrelation für Charaktere) *Seien $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$, $\rho' : G \to \mathrm{GL}(V')$, irred. Darstellungen von G. Dann gilt $\langle \chi_V, \chi_{V'} \rangle = \begin{cases} 0 & V, V' \text{ inäquiv.} \\ 1 & V \cong V' \end{cases}$.*

Remark 3.3 *Für $V \cong \bigoplus_\lambda V_\lambda \otimes \mathbb{C}^{n_\lambda}$ gilt $\langle \chi_{V_\lambda}, \chi_V \rangle = n_\lambda$.*

3.2 Algebren, Gruppenalgebra

Def'n 3.4 (Algebra) *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Eine $\mathbb{K}$-Algebra ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit einer bilinearen Abbildung $\mu : A \times A \to A, (a, b) \mapsto ab$ und einem Element $\mathbb{1} \in A$, so dass für alle $a, b, c \in A$ gilt $\mu(\mu(a, b), c) = \mu(a, \mu(b, c))$ und $\mu(\mathbb{1}, a) = \mu(a, \mathbb{1}) = a$ für alle $a \in A$.*

Die **Gruppenalgebra** $\mathbb{K}[G] = \text{span}\{G\} = \{\sum_{g\in G}\lambda_g g | \lambda_g \in \mathbb{K}\}$ mit Multiplikation $\left(\sum_{g\in G}\lambda_g g\right)\left(\sum_{h\in G}\mu_h h\right) = \sum_{g,h\in G}\lambda_g\mu_h(gh) = \sum_{g\in G}\left(\sum_{h\in G}\lambda_{gh^{-1}}\mu_h\right)g$.

Remark 3.5 (Direkte Summe von Algebren) *Sind A, B Algebren, so ist $A \oplus B$ wieder eine Algebra mit $(a+b)(a'+b') = aa' + bb'$.*

3.3 Existenz und Klassifikation irreduzibler Darstellungen

Reguläre Darstellung $\mathbb{C}[G]$ als Darst. von G durch Linksmultipl. $\rho(g)\cdot x = gx$. In dieser Darstellung ist $\chi(g) = 0$ für $g \in G\setminus\{1\}$ und $\chi(1) = |G|$. Bei Matrixgruppen: Linksmultiplikation auf irgendeinen Vektorraum (Identitätsabbildung, $A \mapsto A$).

Theorem 3.6 (Dim Irreps regulärer Darstellungen) *Zerlegen wir die reguläre Darstellung $\mathbb{C}[G]$ in invariante Unterdarstellungen $\mathbb{C}[G] = \bigoplus_\lambda V_\lambda \otimes \mathbb{C}^{n_\lambda}$, so gilt $n_\lambda = \dim V_\lambda$.*

Korollar 3.7 (Gruppenordnung = dim Irreps^2) *Seien $V_1, \ldots, V_m$ die irreduziblen Darstellungen von G. Dann gilt $|G| = \sum_{j=1}^m (\dim V_j)^2$.*

Korollar 3.8 (Peter-Weyl Theorem für endliche Gruppen) *Die Matrixelemente der Darstellungsmatrizen der irreduziblen Darstellungen (bzgl. einer ONB) bilden eine Orthogonalbasis von $L^2(G)$.*

Korollar 3.9 (Maschke's Theorem) *Seien $V_1, \ldots, V_m$ die irreduziblen Darstellungen von G. Dann ist folgende Abbildung ein Isomorphismus von Algebren:*

$$\mathbb{C}[G] \to \bigoplus_{j=1}^{m} \text{Hom}_\mathbb{C}(V_j, V_j), \quad g \mapsto \begin{pmatrix} \rho_1(g) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \rho_2(g) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \rho_m(g) \end{pmatrix} \qquad \text{(Maschke)}$$

3.4 2. Orthogonalitätsrelation der Charaktere und Charaktertafel

Adjungierte Darstellung Wir betrachten $\mathbb{C}[G]$ mit der adjungierten Darstellung $\rho^{\text{adj}}(g)(h) = ghg^{-1}$. Wir wissen von vorher $\mathbb{C}[G] \cong \bigoplus_\lambda V_\lambda \otimes \mathbb{C}^{n_\lambda^{\text{adj}}}$.

Vielfachheit n_1 der trivialen Darstellung wollen wir auf zwei Arten berechnen:

i) Mit Maschke's Theorem: $(\text{Hom}_\mathbb{C}(V_j, V_j)) \cong \text{Hom}_G(V_j, V_j) \overset{\text{Schur}}{\cong} \mathbb{C}$. Dann ist $n_1 = \dim(\mathbb{C}[G]^G) = \#$ irreps von G.

ii) Mit Charaktertheorie: Der Charakter der adjungierten Darstellung χ ist gegeben durch:
$$\chi(g) = \sum_{h\in G, ghg^{-1}=h} 1 = |\text{Stab}_g| \text{ bzgl. } \rho_{\text{adj}}$$
Dann folgt mit n_{conj} die Anzahl der Konjugationsklassen C_j
$$n_1 = \langle \chi_1, \chi \rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g) = \frac{1}{|G|}\sum_{j=1}^{n_{n_\text{conj}}}|C_j||\text{Stab}_{g_j}| = n_{\text{conj}}$$

Lemma 3.10 (# Konj = # Irreps) *Die Anzahl der Konjugationsklassen einer endlichen Gruppe G ist gleich der Anzahl der komplexen irreduziblen Darstellungen.*

Korollar 3.11 *Die Charaktere der irreps bilden eine ONB des Raumes der Klassenfunktionen.*

Charaktertafel Wir schreiben die Charaktere in der Charaktertafel auf als Darstellungen $V_1, \ldots, V_n$ gegen Konjugationsklassen $C_1 \ldots C_n$ (links). Beispiel: $G = D_3 = S_3 = \{1, \sigma, \sigma^2, \tau, \tau\sigma, \tau^2\sigma\}$ hat Konjugationsklassen $[1], [\sigma], [\tau]$ (rechts).

G	$C_1 = [1]$	$\cdots$	C_n
$V_1 = \mathbb{C}$	$\chi_1(C_1)$	$\cdots$	$\chi_1(C_n)$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
V_n	$\chi_n(C_1)$	$\cdots$	$\chi_n(C_n)$

G	$[1]$	$[\sigma]$	$[\tau]$
$V_1 = \mathbb{C}$	1	1	1
V_2	1	1	-1
V_3	2	-1	0

Remark 3.12 *V_1 ist immer die triviale Darstellung, $\chi_1(C_i) = 1 \forall i$ und $\chi_i(C_1) = \dim(V_i)$.*

Korollar 3.13 (Spaltenorthogonalität) *Die Spalten der Charaktertafel sind auch orthogonal $\sum_{k=1}^n \overline{\chi}_k(C_\alpha)\chi_k(C_\beta) = \delta_{\alpha\beta}\frac{|G|}{|C_\alpha|}$ (Reihen sind orthogonal nach der 1. Orthogonalitätsrelation).*

Lemma 3.14 *χ Charakter von $\rho : G \to \text{GL}(V)$. Dann gilt ρ irreduzibel $\Leftrightarrow \langle \chi, \chi \rangle = 1$*

Lemma 3.15 (Tensorprodukt von Irreps) *Gegeben zwei irreduzible Darstellungen ρ_1, ρ_2, dann ist das Tensorprodukt $\rho_1 \otimes \rho_2$ auch eine irreduzible Darstellung.*

Tricks Charaktertafeln & Konjugationsklassen

i) Tensorprod einer Irrep mit einer eindim ist wieder irreduzibel. Ang man hat bereits eine Irrep T_1 und eine eindim Irrep A_1, dann ist $T_2 = A_1 \otimes T_1$ irreduzibel, $\dim T_2 = \dim T_1$ und $\chi_{T_2} = \chi_{A_1}\cdot\chi_{T_1}$. Überprüfe, ob die gefundene Darstellung inäquivalent zu den bereits gefundenen ist.

ii) Kennt man eine nicht-irred Darstellung ρ und deren Zerlegung $\rho = \rho_1 + \rho_2$, dann ist $\chi = \chi_1 + \chi_2$.

iii) Benutze die reguläre Darstellung χ_{reg} mit $\chi_{\text{reg}}(g) = \sum_i d_i\chi_i(g) = 0$ für $g \in G\setminus\{1\}$, wobei $d_i = \dim$ von Irrep i.

iv) Die Ordnung der Konjugationsklassen teilt die Gruppenordnung.

3.5 Kanonische Zerlegung von Darstellungen

Geg die Zerlegung von V in isotypische Komponenten, $V = \oplus_\lambda V_\lambda \otimes \mathbb{C}^{n_\lambda} = \oplus_\lambda W_\lambda$.

Theorem 3.16 (Projektion) *auf die isotypische Komponenten $P_j : V \to V_j$ von (ρ, V) :*

$$P_j(v) = \frac{\dim W_j}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{\chi}_j(g)\rho(g)(v) \qquad \text{(selbstadungiert)}$$

Remark 3.17 (Kanonische Zerlegung) *ist die Zerlegung $V \cong \oplus_\lambda W_\lambda$ in isotypische Komp.*

Remark 3.18 *Elemente verschiedener Ordnung sind in verschiedenen Konjugationsklassen. Gilt $\chi(g) \neq \chi(h)$ für irgendein χ, so liegen g, h in unterschiedlichen Konjugationsklassen.*

3.6 Charaktertafeln von Punktgruppen

Theorem 3.19 (Konjugationskl, Irreps von kart. Produkt) *Seien $G(G')$ endliche Gruppen mit Konjugationsklassen, Irreps. und Charakteren $C_1, \ldots, C_m, \rho_1, \ldots, \rho_m, \chi_1, \ldots, \chi_m$ $(C'_1, \ldots, C'_n, \rho_1, \ldots, \rho'_n, \chi'_1, \ldots, \chi'_n)$. Dann gilt:*

i) Die Konjugationsklassen von $G \times G'$ sind $C_i \times C'_j, i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$.

ii) Die Irreps von $G \times G'$ sind $\rho_{ij} := \rho_i \otimes \rho'_j$ mit den Charakteren $\chi_{ij}(g, g') = \chi_i(g)\chi_j(g')$.

Remark 3.20 (Kompakte Gruppen) *Die Resultate dieses Kapitels gelten (evt. mit kleinen Änderungen) auch für kompakte Gruppen (zB. $\text{SO}(n)$, $\text{SU}(n)$), dann $\sum_{g\in G} \to \int_G \ldots \text{d}g$.*

4 Darstellungstheorie von S_n

4.1 Definitionen

Zykeldarstellung Beispiel: $\sigma(12345) = (41523) \implies \sigma = (142)(35)$.

Anzahl k-Zykeln i_k^σ von $\sigma \in S_n$. Es gilt $n = \sum_{k=1}^\infty i_k^\sigma k$.

Def'n 4.1 (Signum) *$sgn(\sigma) = (-1)^n$ mit $n = \#$ Paarvertauschungen der Permutation σ. $sgn(\sigma) = -1$ genau dann, wenn Zykeldarstellung ungerade Anzahl von Zykeln mit gerader Länge enthält.*

4.2 Konjugationsklassen

Remark 4.2 (Bestimmung von Konjugationsklassen) *Für $\sigma = (i_1, \ldots, i_r)(i_{r+1}, \ldots)\ldots(\ldots, i_n), \nu \in S_n$ gilt: $\nu\sigma\nu^{-1} = (\nu(i_1), \ldots, \nu(i_r))\ldots(\ldots, \nu(i_n))$.*

Konjugationsklassen werden bezeichnet mit $C_{\underline{i}}$ mit $\underline{i} = (i_1, i_2, \ldots)$.

Lemma 4.3 *$\sigma, \sigma' \in S_n$ sind genau dann in der gleichen Konjugationsklasse, wenn $i_k^\sigma = i_k^{\sigma'} \forall k$.*

Die Konjugationsklassen von S_n sind in 1-1 Korrespondenz zu den Partitionen (Zahlenzerlegungen von n). Die Partitionen werden dargestellt durch Young-Diagramme:

$$\lambda = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline & & & & & \\ \hline & & & \\ \cline{1-4} & \\ \cline{1-2} \end{array} \qquad \hat{\lambda} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ \cline{1-5} 12 & 13 \\ \cline{1-2} \end{array} \qquad \text{(Young-Diagramm)}$$

Lemma 4.4 (Anzahl Partitionen durch Taylorreihe) *Sei $p(n)$ die Anzahl Partitionen von n. Dann ist $p(n)$ gegeben durch $\sum_{n=0}^\infty p(n)t^n = \prod_{k\geq 1}\frac{1}{1-t^k}$.*

Lemma 4.5 (Anzahl Elemente in $C_{\underline{i}}$) *(Konjugationsklassen) von S_n ist $|C_{\underline{i}}| = \frac{n!}{\prod_k k^{i_k} i_k!}$.*

Remark 4.6 *Das Signum ist konstant auf einer Konjugationsklasse.*

4.3 Irreduzible Darstellungen

Def'n 4.7 (Young Schema) *Ein Young Schema ist ein Young Diagramm, das mit den Zahlen $1, \ldots, n$ gefüllt ist, wobei jede Zahl einmal vorkommt.*

Def'n 4.8 (Invariante Permutationen $G_{\hat{\lambda}}$) *Sei $\hat{\lambda}$ ein Young Schema, dann definieren wir $G_{\hat{\lambda}} = \{\sigma \in S_n | \sigma$ lässt die Menge der Zahlen in jeder Zeile invariant $\} \subset S_n$*

Def'n 4.9 (Young-Transponierte λ^T) *Sei λ ein Young Diagramm oder Schema. Dann ist λ^T das Diagramm/Schema, das man durch Spiegeln an der Diagonale erhält.*

Def'n 4.10 (Symmetrisierer, Antisymmetrisierer)
$$s_\lambda = s_{\hat{\lambda}} = \sum_{\sigma\in G_{\hat{\lambda}}}\sigma \in \mathbb{C}[S_n], \qquad a_\lambda = a_{\hat{\lambda}} = \sum_{\sigma\in G_{\hat{\lambda}^T}}\text{sgn}(\sigma)\sigma \in \mathbb{C}[S_n]$$

Def'n 4.11 (Specht Modul) $V_\lambda = \mathbb{C}[S_n]\cdot s_\lambda \cdot a_\lambda \subset \mathbb{C}[S_n]$

Def'n 4.12 (Darstellung zu Young Diagramm) *ist Darstellung $(\rho_\lambda, V_\lambda)$ von S_n für ein Young Diagramm λ durch Linksmultiplikation $\rho_\lambda(\sigma)(v) = \sigma\cdot v$, und es ist $\rho_{\hat{\lambda}} = \rho_\lambda$*

Remark 4.13 *Es gilt: $V_{\lambda^T} = V_\lambda \otimes sgn$.*

Theorem 4.14 (Isomorphie zwischen Irreps) *Die ρ_λ sind irreduzibel. Für $\lambda \neq \mu$ gilt $\rho_\lambda \ncong \rho_\mu$. Für zwei $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2$ Young Schemata mit dem gleichen Young-Diagramm gilt $\rho_{\hat{\lambda}_1} \cong \rho_{\hat{\lambda}_2}$.*

Remark 4.15 *Zu jeder Konjugationsklasse λ von S_n existiert eine irrep $(\rho_\lambda, V_\lambda)$ und dies sind wegen $n_{conj} = n_{irrep}$ alle irreps.*

Remark 4.16 *Allgemein ist $V_{\lambda^T} \simeq V_\lambda \otimes \text{sgn}$ das Produkt mit der alternierenden Darstellung.*

4.4 Charaktertafel

Theorem 4.17 (Frobenius'sche Charakterformel) *Sei λ ein Young-Diagramm, $|\lambda| = n$ und sei $C_{\underline{i}}$ eine Konjugationsklasse von S_n. Dann gilt mit Multiindexnotation*

$$\chi_\lambda(C_{\underline{i}}) = \left(\Delta(x)\prod_{k=1}^n P_k^{i_k}(x)\right)_{x^{\lambda+\rho}} \qquad \text{(Frobenius)}$$

wobei $(p)_{x^\mu}$ der Koeffizient von x^μ im Polynom p ist; $\rho = (n-1, n-2, \ldots, 0)$; $\Delta(x) = \prod_{1\leq i<j\leq n}(x_i - x_j)$ die Vandermonde Determinante; $P_k(x) = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k$ Potenzsumme.

Lemma 4.18 $\det\left(\frac{1}{1-x_ix_j}\right)_{i,j=1,\ldots,n} = \frac{\prod_{i<j}(x_i-x_j)(y_i-y_j)}{\prod_{i,j}(1-x_iy_j)}$

Remark 4.19 (Charakter von S_n-Irreps) *sind entweder 0, 1 oder -1.*

Def'n 4.20 (Hakenlänge) *Die Hakenlänge $h(i,j)$ eines Kästchen a in der i-ten Zeile und j-ten Spalte ist die Anzahl Kästchen unter a und die Anzahl rechts vom Kästchen, wobei a selbst auch gezählt wird.*

Korollar 4.21 (Hakenlängenformel) *Dimension von V_λ (λ Young Diagramm, $|\lambda| = n$) ist*

$$\dim V_\lambda = \frac{n!}{\prod_{(i,j) \text{ Kästchen in } \lambda} h(i,j)}. \qquad \text{(Hakenlängenformel)}$$

4.5 Beispiele: Irreps von S_n

Triviale Darstellung $V_\lambda = span_\mathbb{C}\{s_\lambda\}, \rho_\lambda = id$. Konstruktion von ρ_{triv} von S_n auf $\mathbb{C} : V = \{v \in \mathbb{C}^n | v_1 = v_2 = \ldots = v_n\} \subset \mathbb{C}^n$ mit $\rho_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$.

Alternierende Darstellung auf $\mathbb{C}$: $V_\lambda = span_\mathbb{C}\{a_\lambda\}, \rho_\lambda(\sigma) = sgn(\sigma), \lambda = \lambda_{trivial}^T$

'Summe-Null Darstellung' von S_n auf $\mathbb{C}^{n-1}$: $V = \{v \in \mathbb{C}^n | \sum_i^n v_i = 0\} \cong \mathbb{C}^{n-1}$ und ρ wirkt auf die Basiselemente durch $\rho_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$. Ist irreduzibel.

$$\lambda_{Std.} = \begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline \\ \cline{1-1} \end{array}\ldots\begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline \end{array} \qquad \lambda_{triv} = \begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline \end{array}\ldots\begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline \end{array} \qquad \lambda_{alt.} = \begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline \end{array}\ldots\begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline \end{array}^T$$

5 Lie-Gruppen und ihre Lie-Algebren

Def'n 5.1 (Lie-Gruppe) *ist eine Gruppe G, die die Struktur einer C^∞-Mannigfaltigkeit trägt, so dass die Multiplikation und die Inverse C^∞-Abbildungen sind.*

Def'n 5.2 (Lie-Algebra) *ist ein ($\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$)-Vektorraum $\mathfrak{g}$ zusammen mit einer bilinearen Abbildung, der **Lie-Klammer** $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, so dass gilt*

i) $\forall x, y \in \mathfrak{g} : [x,y] = -[y,x]$,

ii) $\forall x, y, z : [x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0$ *(Jacobi-Identität).*

Def'n 5.3 (Lie-Algebra-Homomorphismus) *Von Lie-Algebren $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'$ Lie-Algebren ist $f \in Hom(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}')$, s.d. $f([x,y]) = [f(x), f(y)] \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}$. f invertierbar $\implies$ **Isomorphismus**.*

Def'n 5.4 (Abelsch) *ist eine Lie-Algebra $\mathfrak{g}$, falls $[x,y] = 0 \forall x, y \in \mathfrak{g}$.*

Def'n 5.5 (Direkte Summe von LA) *Seien $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ Lie-Algebren. Dann ist die direkte Summe $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$ wieder eine Lie-Algebra mit Klammer*

$$x, x' \in \mathfrak{g}, y, y' \in \mathfrak{h} : [x+y, x'+y'] = [x,x']_{\mathfrak{g}} + [y,y']_{\mathfrak{h}}.$$

Def'n 5.6 (Lie-Unteralgebra) *ist ein Untervektorraum $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, falls $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$.*

Def'n 5.7 (Ideal) *ist Untervektorraum $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, falls sogar $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] \subset h$. Ist $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ ein Ideal, so ist $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ wieder eine Lie-Algebra mit Klammer $[x+\mathfrak{h}, y+\mathfrak{h}] = [x,y] + \mathfrak{h}$.*

5.1 Darstellung von Lie-Algebren, Schur's Lemma

Def'n 5.8 (Darstellung) *der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ auf dem Vektorraum V ist ein Lie-Algebra-Homomorphismus $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V) = \mathrm{End}(V)$.*

Def'n 5.9 (LA Darstellungshomomorphismus) *$f \in \mathrm{Hom}(V, V')$ von Darstellungen ρ, ρ' von Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ erfüllt $f \circ \rho(x) = \rho'(x) \circ f$, $\forall x \in \mathfrak{g}$. Notation: $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, V')$.*

Def'n 5.10 (Direkte Summe, Tensorprodukt) *von Lie-Algebra Darstellungen ρ, ρ' von $\mathfrak{g}$:*

- *Die direkte Summe von Darstellungen $\rho \oplus \rho'$ auf $V \oplus V'$: $\forall x \in \mathfrak{g}, v + v' \in V \oplus V$: $(\rho \oplus \rho')(x)[v+v'] = \rho(x)v + \rho'(x)v'$.*
- *Das Tensorprodukt $\rho \otimes \rho'$ auf $V \otimes V'$: $\forall x \in \mathfrak{g}, v \otimes v' \in V \otimes V'$: $(\rho \otimes \rho')(x)[v \otimes v'] = (\rho(x)v) \otimes v' + v \otimes (\rho'(x)v')$*
- *Für $f \in \mathrm{Hom}(V, V')$ ist eine Darstellung $\rho_{\mathrm{Hom}}(x)[f] = \rho'(x) \circ f - f \circ \rho(x)$*

Def'n 5.11 (Invariante Unterräume, Irreduzibilität, vollständig reduzibel) *Analog zu den Definitionen bei Gruppen, ersetze G durch $\mathfrak{g}$, $\mathrm{GL}(V)$ durch $\mathfrak{gl}(V)$.*

Lemma 5.12 (Schur) *Analog zum Lemma von Schur bei Gruppen, ersetze G durch $\mathfrak{g}$, $\mathrm{GL}(V)$ durch $\mathfrak{gl}(V)$ und $\mathrm{Hom}_G(V, V')$ durch $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, V')$*

Def'n 5.13 (Unitäre Darstellung) *Sei $\mathfrak{g}$ e reelle Lie-Algebra und $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ e Darstellung auf dem Skalarproduktraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Man nennt d Darstellung unitär (orthogonal), falls $\forall x \in \mathfrak{g} : \langle \rho(x)v, v' \rangle + \langle v, \rho(x)v' \rangle = 0$, $\forall v, v' \in V$, dh. $\rho(x)$ ist anti-selbstadjungiert.*

Theorem 5.14 (Invarianzerhaltung) *Sei $W \subset V$ ein $\mathfrak{g}$-invarianter Unterraum und die Darstellung von $\mathfrak{g}$ auf V unitär, dann ist $W^\perp \subset V$ auch ein $\mathfrak{g}$-invarianter Unterraum.*

Theorem 5.15 (Unitär $\implies$ vollst reduzibel) *Endl. dim. unitäre Darstellungen von Lie-Algebren sind vollständig reduzibel.*

5.2 Lie-Gruppen - Lie-Algebra Korrespondenz

Theorem 5.16 (Berechnung von Lie-Algebren) *Sei G eine Lie-Gruppe. Dann ist der Tangentialraum an der Identität $\mathfrak{g} = T_{\mathbb{1}}G$ eine Lie-Algebra mit Lie-Klammer definiert als: Seien $\gamma, \mu : (-1,1) \to G$ glatte Kurven mit $\gamma(0) = \mathbb{1}, \mu(0) = \mathbb{1}, \dot\gamma(0) = x, \dot\mu(0) = y$. Dann ist*

$$[x,y] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \gamma(s)\mu(t)\gamma(s)^{-1}.$$

Remark 5.17 *Sei die $k-$dim. Lie-Gruppe gegeben durch $M = \{x \in U | F(x) = 0\}$ für $F : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ auf $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, so dass 0 ein regulärer Wert von F ist (Satz vom regulären Wert). Dann ist die zugehörige $k-$dim. Lie-Algebra $T_{\mathbb{1}}M = ker(D_{\mathbb{1}}F)$.*

Theorem 5.18 (LG-Hom $\implies$ LA-Hom) *Sei $\Phi : G \to H$ ein Homomorphismus von Lie-Gruppen. Dann ist $\varphi = D_{\mathbb{1}}\Phi : T_{\mathbb{1}}G \to T_{\mathbb{1}}H$ ein Homomorphismus von Lie-Algebren.*

Remark 5.19 $\varphi(X) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0}\Phi(\gamma(t))$ *für Weg $\gamma(t) \in G$ mit $\gamma(0) = 1$ und $\dot\gamma(0) = X$.*

Theorem 5.20 *Sei G eine zusammenhängende Lie-Gruppe. Dann erzeugt jede offene Umgebung U von $1 \in G$ die Gruppe G. Genauer: Jedes $g \in G$ kann geschrieben werden als $g = g_1 g_2 \ldots g_n$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $g_1, \ldots, g_n \in U$.*

Korollar 5.21 *Seien G, H Lie-Gruppen, G zusammenhängend. Dann ist die Abbildung $\mathrm{Hom}_{\textit{Lie-Gruppen}}(G, H) \to \mathrm{Hom}_{\textit{Lie-Algebren}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) : F \mapsto f = \mathrm{D}_{\mathbb{1}}F$ injektiv. Der Lie-Gruppenhom. ist eindeutig bestimmt durch den zugehörigen Lie-Algebra-Homomorphismus.*

Theorem 5.22 *G zusätz. einfach zshg, so ist die Abbildung aus dem Korollar vorher bijektiv.*

Remark 5.23 *Für einfach zsmhgd. Gruppe G sind alle Darstellungen somit eindeutig bestimmt durch die Darstellungen von $\mathfrak{g}$. Im Fall einer Darstellung ρ einer Matrixgruppe G ist die entsprechende Darstellung ρ_* der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$:* $\quad \rho_*(X) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0}\rho(\exp(tX))$.

Remark 5.24 (Zusammenhäng.) *Sei $V \subset G$ offen, abgeschlossen. Dann $V = \emptyset$ od. $V = G$.*

Remark 5.25 *Für Darst'n $(\rho, V), (\rho_*, V)$ einer zusammenhängenden Lie-Gruppe und ihrer Lie-Algebra und $f \in \mathrm{Hom}(V)$ gilt: $f \circ \rho = \rho \circ f \iff f \circ \rho_* = \rho_* \circ f$.*

Def'n 5.26 (Adjungierte Darstellung) *von G auf $\mathfrak{g}$ ist $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g}), \mathrm{Ad}(g)X = gXg^{-1}$ und die entsprechende Lie-Algebra Darstellung ist $ad : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}), ad(X)Y = [X,Y]$.*

5.3 Exponentialabbildung von Matrizen

Def'n 5.27 *Definiere auf $\mathbb{K}^{n\times n}$ die Operatornorm* $\|X\| = \sup_{v \in \mathbb{K}^n, \|v\|_2 = 1} \|Xv\|_2$.

Lemma 5.28 *Seien $X, Y \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Die Reihe $\exp(X) = e^X = \sum_{k=0}^\infty \frac{X^k}{k!}$ konvergiert absolut.*

i) *Falls $XY = YX$, gilt $e^X e^Y = e^{XY}$.*

ii) *e^X ist invertierbar, $e^X \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$.*

iii) $(e^X)^{-1} = e^{-X}$

iv) *$\forall A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$: $Ae^X A^{-1} = e^{AXA^{-1}}$*

v) $\det(e^X) = e^{\mathrm{tr}(X)}$

vi) $(e^X)^\dagger = e^{X^\dagger}$

vii) *$X \mapsto e^X$ ist analytisch, $\frac{d}{dt}e^{tX} = Xe^{tX}$.*

Lemma 5.29 (Invertierbarkeit, log) $\exp : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ *ist in einer Umgebung der Einheitsmatrix invertierbar. Eine explizite Inverse is $\log X = \sum_{k=1}^\infty (-1)^{k+1} \frac{(X-\mathrm{Id})^k}{k}$.*

Remark 5.30 *$\mathfrak{exp} : \mathfrak{gl}(n) \to GL(n)$ ist surjektiv.*

5.4 Allgemeine Exponentialabbildung

Sei G eine Lie-Gruppe, $\mathfrak{g}$ die Lie-Algebra und für $g \in G$ $L_g : h \mapsto L_g h = gh$ die Linksmultiplikation. Definiere Vektorfeld $v_x : g \in G \mapsto v_x(g) = D_{\mathbb{1}} L_g x \in T_g G$ und löse die DGL $\dot\varphi_x(t) = v_x(\varphi_x(t)), \varphi_x(0) = \mathrm{Id} \in G$. v_x ist glatt, also existiert die Lösung zumindest für kleine t und ist eindeutig. Ferner gilt $\varphi_x(s+t) = \varphi_x(s)\varphi_x(t)$.

Def'n 5.31 (Exponentialabb) $\exp : \mathfrak{g} \to G$ *ist def als $x \mapsto \exp(x) := \varphi_x(t=1)$.*

Remark 5.32 *$\mathfrak{exp}$ ist glatt und $\mathrm{D}_0\mathfrak{exp} = \mathbb{1}_{\mathfrak{g}}$. Also ist exp nach dem inversen Funktionstheorem lokal invertierbar. Insbesondere enthält $\exp(\mathfrak{g})$ eine offene Umgebung von $\mathbb{1} \in G$.*

Remark 5.33 *exp ist i. A. weder injektiv noch surjektiv. G kompakt und zusammenhängend $\implies$ exp surjektiv. Für Lie-Gruppen Homomorphismen $F : G \to H$: Sei $f = \mathrm{D}_1 F$ der zugehörige Lie-Algebra Homomorphismus, dann $\forall x \in \mathfrak{g} : F(\exp(x)) = \exp(f(x))$.*

5.5 Beispiele

$$\begin{aligned}
\mathrm{SL}(n) &= \{A \in \mathbb{K}^{n\times n} | \det A = \mathbb{1}\}, & \mathfrak{sl}(n) &= \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} | \mathrm{tr}A = 0\} \\
& & \mathfrak{sl}(n, \mathbb{K}) &= \{A \in \mathbb{K}^{n\times n} | \mathrm{tr}A = 0\} \\
\mathrm{O}(n) &= \{R \in \mathbb{R}^{n\times n} | R^T R = \mathbb{1}\}, & \mathfrak{o}(n) &= \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} | A^T + A = 0\} \\
\mathrm{SO}(n) &= \{R \in O(n) | \det R = 1\}, & \mathfrak{so}(n) &= \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} | A^T + A = 0\} = \mathfrak{o}(n) \\
& & \mathfrak{so}(n, \mathbb{C}) &= \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} | A^T + A = 0\} \\
& & \mathfrak{so}(p,q) &= \{x \in \mathbb{R}^{n\times n} | x^T I_{p,q} + I_{p,q} x = 0\} \\
& & \mathfrak{so}^*(2n) &= \{x \in \mathfrak{su}(n,n) | x^T J_n + J_n x = 0\} \\
\mathrm{U}(n) &= \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} | A^\dagger A = \mathbb{1}\}, & \mathfrak{u}(n) &= \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} | A^\dagger + A = 0\} \\
\mathrm{SU}(n) &= \{A \in U(n) | \det A = 1\}, & \mathfrak{su}(n) &= \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} | A^\dagger + A = 0,\ \mathrm{tr}(A) = 0\} \\
& & \mathfrak{su}(p,q) &= \{x \in \mathbb{C}^{n\times n} | x^\dagger I_{p,q} + I_{p,q} x = \mathrm{tr}(x) = \\
\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{K}) &= \{A \in \mathbb{K}^{2n\times 2n} | A^T \omega A = \omega\} & \mathfrak{sp}(2n, \mathbb{C}) &= \{A \in \mathbb{C}^{2n\times 2n} | A^T\Omega + \Omega A = 0\} \\
& & \mathfrak{sp}(p,q) &= \{x \in \mathbb{H}^{n\times n} | x^\dagger I_{p,q} + I_{p,q} x = 0\}
\end{aligned}$$

Alle Gruppen sind kompakt und zusammenhängend mit Ausnahmen: $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}), \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$, $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{K})$ sind nicht kompakt. $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ für $n > 1$, $\mathrm{O}(n)$ sind nicht zusammenhängend.

6 Darstellungstheorie von $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, $\mathrm{SU}(2)$ und $\mathrm{SO}(3)$

6.1 Darstellungen von $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$

Wir betrachten $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) = \{x \in \mathbb{C}^{2\times 2} | \mathrm{tr}(x) = 0\}$ mit der Lie-Klammer dem Kommutator. Eine Basis mit Kommutatorrelationen ist gegeben durch

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \text{ Basis})$$

$$[h, e] = 2e, \quad [h, f] = -2f, \quad [e, f] = h \qquad \text{(Kommutatoren)}$$

Remark 6.1 *Es gilt $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \cong \mathfrak{su}(2) \otimes \mathbb{C} \cong \mathfrak{so}(3) \otimes \mathbb{C}$.*

Theorem 6.2 (Irreduzible Darstellungen von $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$) *Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Wir konstruieren eine $n+1$-dimensionale irreduzible Darstellung von $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ auf V_n. Sei $e_0, \ldots, e_n$ eine Basis von V_n und definiere*

$$\rho(f)e_j = e_{j+1}, \quad \rho(h)e_j = (n-2j)e_j, \quad \rho(e)e_j = j(n-j+1)e_{j-1}$$

mit $e_{n+1} := 0, e_{-1} := 0$. Dann sind die V_n irreduzibel und bzgl. des SP $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} \frac{i!}{(n-i)!}$ gilt: $\rho(h)^\dagger = \rho(h)$, $\rho(e)^\dagger = \rho(f)$ (unitär als $\mathfrak{su}(2)$ Darstellung).

Remark 6.3 *Physikalisch ist V_n der Hilbertraum des Teilchen-Spinanteils mit Spin $N = \frac{n}{2}$.*

Theorem 6.4 (Irreps sind eindeutig) *Sei $n \geq 0$ und $\rho : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}(V)$ eine $n+1$-dimensionale irreduzible Darstellung. Dann gilt $V \cong V_n$.*

Def'n 6.5 (Casimir-Operator) *Sei $\rho : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}(V)$ irgendeine Darstellung von $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Dann definieren wir den **Casimir-Operator** $Z = \frac{1}{2}\rho(h)^2 + \rho(h) + 2\rho(f)\rho(e) \in \mathrm{Hom}(V, V')$. In der Physik entspricht Z dem totalen Drehimpuls im Quadrat: $\frac{\hbar^2}{2} Z = \|\hat{L}\|^2$.*

Lemma 6.6 $Z \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})}(V, V)$

Remark 6.7 (Z konstant auf Irreps) *Mit Schur folgt, dass für V irreduzibel $Z = \lambda \mathbb{1}_V$.*

Remark 6.8 *Auf V_n gilt $Z = (\frac{1}{2}n^2 + n)\mathbb{1}_{V_n} = 2N(N+1)\mathbb{1}_{V_n}$, $N = \frac{n}{2}$.*

Theorem 6.9 (Endl dim $\implies$ vollständig reduzibel) *Jede endlich dimensionale Darstellung von $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ ist vollständig reduzibel.*

Korollar 6.10 *Sei ρ eine Darstellung von $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ auf V, $\dim V < \infty$.*

- *$\rho(h)$ ist diagonalisierbar, die Eigenwerte liegen in $\mathbb{Z}$ und die Vielfachheit der Eigenwerte $\pm k, k \in \mathbb{Z}$ sind gleich.*
- *Es gibt ein Skalarprodukt auf V, sodass $\rho(h)^\dagger = \rho(h)$, $\rho(e)^\dagger = \rho(f)$ und die entsprechende Darstellung von $\mathfrak{su}(2) \subset \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ unitär ist.*

6.2 Darstellungen von $\mathfrak{su}(2)$ und $\mathfrak{so}(3)$

$$u_1 = i\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = i\sigma_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad (\mathfrak{su}(2) \text{ Basis})$$

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\mathfrak{so}(3) \text{ Basis})$$

$$[u_i, u_j] = 2\varepsilon_{ijk} u_k, \qquad [L_i, L_j] = \varepsilon_{ijk} L_k \qquad \text{(Kommutatoren)}$$

$$Z = -\frac{1}{2}(\rho(u_1)^2 + \rho(u_2)^2 + \rho(u_3)^2) = -2(\rho(L_1)^2 + \rho(L_2)^2 + \rho(L_3)^2) \qquad \text{(Casimir)}$$

$$h \leftrightarrow iu_3 \leftrightarrow -2iL_3 \qquad e \leftrightarrow \frac{1}{2}(u_2 - iu_1) \leftrightarrow iL_1 - L_2 \qquad f \leftrightarrow -\frac{1}{2}(u_2 + iu_1) \leftrightarrow iL_1 + L_2$$

Remark 6.11 (Irreduzible Darstellungen) *Die Irreps von $\mathfrak{su}(2)$ und $\mathfrak{so}(3)$ sind gerade die Einschränkung der komplexen Irreps V_n von $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ auf $\mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{so}(3)$, d. h. es gibt für jedes $n \in \mathbb{N}$ genau eine Irrep. Es gilt hier also $\rho(iu_3)e_j = \rho(-2iL_3)e_j = (n-2j)e_j$*

Remark 6.12 (Darstellung von $\mathfrak{su}(2)$ und $\mathfrak{so}(3)$ in irreps zerlegen:) *Sei eine Lie-Algebra Darst. (σ, U) gegeben, dann wissen wir, dass W in die irreps von $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ zerfällt. Zu jeder irrep gibt es einen Höchstgewichtsvektor e_n je irrep, diese erfüllen $\sigma(e)e_n = 0$, $\sigma(h)e_j = ne_n$ (entsprechende Operatoren von $\mathfrak{su}(2)$ und $\mathfrak{so}(3)$ für e und h benutzen). Diese Gleichungen bestimmen die e_n und ihre Gewichte und damit die irreps.*

Remark 6.13 (Notation Physik) *Hier bezeichnet man die irreps $V_{2j} = \mathcal{D}_j$ für $2j \in \mathbb{N}$. In $\mathfrak{so}(3)$ benutzt man $M_j = iL_J$, s. d. $\rho(M_1)^2 + \rho(M_2)^2 + \rho(M_3)^2 = j(j+1)\mathbb{1}$ und $\rho(M_3)e_k = (j-k)e_k = me_k$ mit $m \in \{j, j-1, ..., -j+1, -j\}$. Die Basisvektoren werden durch die Eigenwerte m, j gekennzeichnet. Die Auf- und Absteigeoperatoren $M_+ = M_1 + iM_2$, $M_- = M_1 - iM_2$ entsprechen dann gerade e und f.*

6.3 Der Homomorphismus $\mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$

Wir betrachten Vektorraum $H_0 = \{X \in \mathbb{C}^{2\times 2} | X^\dagger = X, \mathrm{tr}X = 0\}$ mit Pauli Matrizen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ als Basis, sodass $X = x\sigma_1 + y\sigma_2 + z\sigma_3 = \vec{v} \cdot \sigma$, und Skalarprodukt definiert als

$$\langle X, Y\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(XY) = \frac{1}{2}\sum_{p,q=1}^3 v_p w_q \mathrm{tr}(\sigma_p\sigma_q) = \sum_p w_p v_p = \langle v, w\rangle_{\mathbb{R}^3}$$

Theorem 6.14 *(i) Die Abbildung $\rho : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{GL}(H_0)(\cong \mathrm{GL}(\mathbb{R}^3))$, sodass $\rho(A)X = AXA^\dagger$ ist eine Darstellung von $\mathrm{SU}(2)$ auf H_0.*
(ii) Die Darstellung ist orthogonal $\langle \rho(A)X, \rho(A)Y\rangle = \langle X, Y\rangle$, $X, Y \in H_0$, $\forall\, A \in \mathrm{SU}(2)$.
(iii) $\det \rho(A) = 1$ für alle $A \in \mathrm{SU}(2)$.

Remark 6.15 *Wegen (ii), (iii) ist ρ ein Gruppenhomomorphismus $\rho : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3) \subset \mathrm{GL}(3,\mathbb{R}) \cong \mathrm{GL}(H_0)$.*

Lemma 6.16 *Die zugehörigen Abbildungen $\mathrm{D}_1\rho : \mathfrak{su}(2) \to \mathfrak{so}(3)$ von Lie-Algebren sind gegeben durch $u_i \mapsto -2L_k$ für $k = 1,2,3$. Dies sind Isomorphismen.*

Theorem 6.17 *Der Gruppenhomomorphismus $\rho : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$ ist surjektiv mit $\ker \rho = \{\pm 1\}$. Also ist $\mathrm{SO}(3) \cong \mathrm{SU}(2)/\{\pm 1\}$.*

Remark 6.18 *Die Abbildung ist 2:1, also jedes Element in SO(3) hat genau zwei Urbilder in $\mathrm{SU}(2)$. Also ist topologisch $\mathrm{SO}(3) \cong S^3/\{\pm 1\} \cong \mathbb{RP}^3$. Hier ist $\mathbb{RP}^3$ der real projective space, der topologische Raum von Linien, die durch den Ursprung gehen in $\mathbb{R}^4$.*

Remark 6.19 $\mathrm{SU}(2) \cong \mathrm{S}^3$ *ist einfach zusammenhängend.* $\mathrm{SO}(3) \cong \mathrm{S}^3/\pm\mathbb{1}$ *ist nicht einfach zusammenhängend.*

6.4 Darstellungen von $\mathrm{SU}(2)$

Lemma 6.20 *Jedes $A \in \mathrm{SU}(2)$ ist von der Form $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha}\end{pmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.*

Remark 6.21 $\mathrm{SU}(2)$ *ist damit mit der 3-Sphäre $S^3 = \{\alpha, \beta \in \mathbb{C} | |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1\} \subset \mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$ identifiziert. Die Lie-Algebra ist $\mathfrak{su}(2) \cong \mathbb{R}^3$.*

Lemma 6.22 $\exp : \mathfrak{su}(2) \to \mathrm{SU}(2)$ *ist surjektiv.*

Theorem 6.23 *(i) Alle komplexen endl dim Darstellungen von $\mathrm{SU}(2)$ sind vollst reduzibel.*
(ii) Die irred. Darstellungen V_n von $\mathfrak{su}(2)$ der Dimension $n+1$ setzen sich auf eine Darstellung V_n von $\mathrm{SU}(2)$ fort $\forall n = 0, 1, 2, \ldots$.
(iii) Sei V eine irred. Darstellung von $\mathrm{SU}(2)$ der Dimension $n+1$. Dann gilt $V \cong V_n$.

Remark 6.24 *Im Beweis wird die Abbildung definiert (mit U_n dem Raum der homogenen Polynome von Grad n in zwei Variablen)*

$$\rho_n : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{GL}(U_n), (\rho_n(A)p)(z) = p(A^{-1}z)$$

mit der zugehörigen Lie-Algebra Darstellung gefunden durch Ableitung, $\nu_n = D\rho_n$:

$$(\nu_n(h)p)(z) = (-z_1\partial_{z_1} + z_2\partial_{z_2})p(z)$$
$$(\nu_n(e)p)(z) = -z_2\partial_{z_1}p(z)$$
$$(\nu_n(f)p)(z) = -z_1\partial_{z_2}p(z)$$

Lemma 6.25 *Diese Darstellung (ν, U_n) von $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ ist isomorph zu V_n.*

Remark 6.26 *Die $\mathrm{SU}(2)$-Darstellung U_n ist unitär bzgl. des Skalarproduktes*

$$\langle p, q\rangle = \overline{p}(\partial_{z_1}, \partial_{z_2})q(z_1, z_2)|_{z=0}.$$

6.5 Darstellungen von $\mathrm{SO}(3)$

Theorem 6.27 *i) Alle komplexen, endl-dim $\mathrm{SO}(3)$-Darstellungen sind vollst reduzibel.*
ii) Von den Irreps von $\mathfrak{so}(3) \cong \mathfrak{su}(2)$ sind genau die mit $n = 2\ell$ gerade eine $\mathrm{SO}(3)$-irrep.
iii) Sei V eine Irrep von $\mathrm{SO}(3)$. Dann gilt $\dim V = n+1$ ungerade, $V \cong V_n$.

Lemma 6.28 *Die $\mathfrak{so}(3)$ Darstellung V_n für n ungerade lässt sich nicht auf SO(3) fortsetzen.*

Die Beziehung $\mathfrak{so}(3) \leftrightarrow \mathrm{SO}(3)$: Sei $A = x_1L_1 + x_2L_2 + x_3L_3 = x \cdot L \in \mathfrak{so}(3)$, dann ist $e^A \in \mathrm{SO}(3)$. Für alle $y \in \mathbb{R}^3$ gilt $(x \cdot L)y = x \wedge y$ und $(x\cdot L)^2 y = -\|x\|^2 \left(\mathbb{1} - \frac{xx^T}{\|x\|^2}\right) y$ und $(x \cdot L)^3 y = -\|x\|^2 (x \cdot L)y$.

Das $\mathfrak{so}(3)$ Element für die Drehung $\exp(x \cdot L)y = \frac{x}{\|x\|^2}(x \cdot y) + \cos\varphi \left(\mathbb{1} - \frac{xx^T}{\|x\|^2}\right) y + \sin\varphi \frac{x \wedge y}{\|x\|} = R(\hat{n}, \varphi) \in \mathrm{SO}(3)$, mit Winkel $\varphi = \|x\|$, Achse $\hat{n} = \frac{x}{\|x\|}$, ist $A = (\hat{n} \cdot \vec{L})\varphi$.

Remark 6.29 *Es gilt also: $\rho(R(\hat{n}, \theta)) = \exp(\theta(n_1\rho_*(L_1) + n_2\rho_*(L_2) + n_3\rho_*(L_3)))$*

Remark 6.30 (Surjektivität, Injektivität) $\exp$ *ist surjektiv, da jedes Element $R \in \mathrm{SO}(3)$ eine Drehung ist, aber aufgrund der 2π-Periodizität nicht injektiv.*

Remark 6.31 *Jedes Element von $\mathrm{O}(3)$ ist entweder von der Form $R(n, \varphi)$ oder $-R(n, \varphi)$.*

6.6 Tensorprodukte von Darstellungen

Theorem 6.32 (Clebsh-Gordan-Zerlegung von SU(2) Darst.) *Für $n, m \geq 0$ gilt:*

$$V_n \otimes V_m \cong V_{n+m} \oplus V_{n+m-2} \oplus \cdots \oplus V_{|n-m|}$$

Die irreduzible Unterdarstellung $V_{n+m-2\ell}$ ist aufgespannt durch

$$w_\ell, \rho(f)w_\ell, \ldots, \rho(f)^{n+m-2\ell}w_\ell \quad \text{mit} \quad w_\ell = \sum_{j=0}^{\ell}(-1)^j \frac{(n-j)!(m-l\ell+j)!}{j!(\ell-j)!} e_j \otimes e_{\ell-j}.$$

Betrachte nun eine Darst. ρ auf dem Tensorprodukt $V \otimes V$ mit Basis $\{v_i \otimes v_j\}$ ($\{v_i\}_{i=1,\ldots,n}$ Basis von V) und Operator $T(v_i \otimes v_j) = v_j \otimes v_i$.

Def'n 6.33 (Symmetrisches Quadrat) $S^2V = \{v \in V \otimes V | T(v) = v\}$, *$\dim(S^rV_n) = n + r - 1$ binomial r, $\chi_{S^2V}(g) = \frac{1}{2}(\chi(g)^2 + \chi(g^2))$*

Def'n 6.34 (Alternierendes Quadrat) $\Lambda^2 V = \{v \in V \otimes V | T(v) = -v\}$, *$\dim(\Lambda^2 V) = \frac{\dim(V)(\dim(V)-1)}{2}$, $\chi_{\Lambda^2 V}(g) = \frac{1}{2}(\chi(g)^2 + \chi(g^2))$*

Remark 6.35 *Es gilt $V \otimes V = S^2 V \oplus \Lambda^2 V$ (i. A. keine Irreps)*

7 Struktur von Lie-Algebren

7.1 Killing-Form, Auflösbarkeit

Def'n 7.1 (Killing-Form) *Sei $\mathfrak{g}$ eine endlich dimensionale Lie-Algebra ($\dim \mathfrak{g} < \infty$), dann nennt man die symmetrische Bilinearform*

$$K : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{K}, (x, y) \mapsto \mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_y) \qquad \text{(Killing-Form)}$$

*die **Killing-Form** von $\mathfrak{g}$.*

Remark 7.2 *Die Killing-Form ist $\mathfrak{g}$-invariant, das heisst $K([x,z], y) = K(x, [z, y])$.*

Remark 7.3 (Degeneriert) *ist die Killing-Form, falls $\exists x \in \mathfrak{g} : \forall y \in \mathfrak{g} : K(x, y) = 0$*

Remark 7.4 (Killing-Form $\mathfrak{gl}(n)$) *ist $K(x, y) = 2n\mathrm{tr}(xy) - 2\mathrm{tr}(x)\mathrm{tr}(y)$ (degeneriert)*

Remark 7.5 (Killing-Form $\mathfrak{sl}(n)$) *ist $K(x, y) = 2n\mathrm{tr}(xy)$ (nicht-degeneriert)*

Remark 7.6 (Killing-Form $\mathfrak{so}(3) \cong \mathbb{R}^3$) *ist $K(x, y) = -2(x \cdot y)$ (nicht-degeneriert)*

Def'n 7.7 (Auflösbarkeit) *Definiere $\mathcal{D}^0\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$, $\mathcal{D}^{n+1}\mathfrak{g} = [\mathcal{D}^n\mathfrak{g}, \mathcal{D}^n\mathfrak{g}]$. Eine Lie-Algebra heisst auflösbar, falls ein N existiert, sodass $\mathcal{D}^N\mathfrak{g} = \{0\}$.*

7.2 Einfache und halb-einfache Lie-Algebren

Def'n 7.8 (Einfach) *ist eine Lie-Algebra $\mathfrak{g}$, wenn sie keine Ideale hat ausser $0, \mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}$ nicht abelsch ist (dh. $[\cdot,\cdot] \neq 0$.)*

Def'n 7.9 (Halbeinfach) *ist eine Lie-Algebra, wenn sie keine vom Nullraum verschiedenen auflösbare Ideale enthält.*

Theorem 7.10 (Cartans Kriterium) *Eine Lie-Algebra ist genau dann halbeinfach, wenn die Killing-Form nicht degeneriert ist.*

Theorem 7.11 (Halbeinfache LA $\cong \sum$ einfache LA) *Jede halb-einfache Lie-Algebra ist isomorph zu einer direkten Summe von einfachen Lie-Algebren und umgekehrt.*

Theorem 7.12 *Jede komplexe einfache Lie-Algebra ist isomorph zu einer der folgenden:*

- $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$
- $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$, *schreibe B_k für $n = 2k+1$, D_k für $n = 2k$*
- $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{C})$
- *Lie-Algebren ℓ_6, ℓ_7, ℓ_8 mit Dimensionen 78, 133, 248*
- *Lie-Algebra $\mathfrak{f}_4$, Dimension 52*
- *Lie-Algebra $\mathfrak{g}_2$, Dimension 14*

Remark 7.13 *Sei $\mathfrak{g}$ eine komplexe Lie-Algebra. Dann kann man $\mathfrak{g}$ auch als reelle Lie-Algebra $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ doppelter Dimension auffassen.*

Theorem 7.14 *Jede reelle einfache Lie-Algebra ist enthalten in der folgenden Liste:*

- *$\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ für $\mathfrak{g}$ eine komplexe einfache Lie-Algebra*
- *17 reelle Lie-Algebren, deren Komplexifizierung eine der komplexen Lie-Algebren $\ell_6, \ell_7, \ell_8, \mathfrak{f}_4, \mathfrak{g}_2$ ist.*
- $\mathfrak{so}(p, q)$
- $\mathfrak{su}(p, q)$
- $\mathfrak{sp}(p, q)$
- $\mathfrak{sp}(2n, R)$
- $\mathfrak{s}\ell(n, \mathbb{R})$
- $\mathfrak{s}\ell(n, \mathbb{H})$
- $\mathfrak{so}^*(2n)$

7.3 Struktur von halb-einfachen Lie-Algebren

Def'n 7.15 (Torische und Cartan-Unteralgebren) *Sei $\mathfrak{g}$ eine komplexe halb-einfach Lie-Algebra. Eine Lie-Unteralgebra $\mathfrak{h} \in \mathfrak{g}$ heisst **torisch**, falls*

i) $\mathfrak{h}$ abelsch ist, d.h. $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = 0$,
ii) alle $\mathrm{ad}_x : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ für $x \in \mathfrak{h}$ diagonalisierbar sind.

*Die Lie-Unteralgebra $\mathfrak{h}$ heisst **Cartan-Unteralgebra** (maximal torisch), falls $\mathfrak{h}$ maximal gross ist, dh. $\mathfrak{g} \supseteq \mathfrak{h}' \supset \mathfrak{h} \implies \mathfrak{h}'$ nicht torisch.*

Remark 7.16 adj_x *ist genau dann diagonalisierbar, wenn die Matrix x diagonalisierbar ist.*

Wir verwenden eig immer $\mathfrak{h} = \{\mathrm{diag}(x_1, \ldots, x_n) | \sum_i x_i = 0, x_i \in \mathbb{C}\ \forall i\}$. TODO

Theorem 7.17 (Cartan-UA sind isomorph) *Seien $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2$ Cartan-Unteralgebren von $\mathfrak{g}$. Dann existiert ein Isomorphismus $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ sodass $\varphi(\mathfrak{h}_1) = \mathfrak{h}_2$. Insbesondere $\dim \mathfrak{h}_1 = \dim \mathfrak{h}_2$. Die Dimension der Cartan Unteralgebra nennt man den **Rang der Lie-Algebra**.*

Diagonalisierung von ad_x : Kommutierende diagonalisierbare Operatoren kann man simultan diagonalisieren, also können wir ad_x mit $x \in \mathfrak{h}$ simultan diagonalisieren.

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha$$

mit endl Teilmenge $\Delta \subset \mathfrak{h}^*$ (Eigenwerte $\neq 0$), sd $\mathrm{ad}_x y = \alpha(x)y$ für $y \in \mathfrak{g}_\alpha$, $x \in \mathfrak{h}$, $\mathfrak{h}$ ist Eigenraum zum Eigenwert 0.

Def'n 7.18 (Wurzeln) *Die Elemente von $\Delta \subset \mathfrak{h}^*$ heissen **Wurzeln** von $\mathfrak{g}$.*

Proposition 7.19 *Sei $\mathfrak{g}$ eine endlich dimensionale komplexe halb-einfache Lie-Algebra und sei $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine Cartan Unteralgebra wie oben. Dann gilt*

i) $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$, also $\mathrm{adj}_{\mathfrak{g}_\alpha}\mathfrak{g}_\beta = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$.
ii) Falls $\alpha, \beta \in \{0\} \cup \Delta$ und $\alpha + \beta \neq 0$, dann ist $K(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta) = 0$.
iii) Falls $\alpha \in \{0\} \cup \Delta$, dann ist K nicht-degeneriert auf $\mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_{-\alpha}$. Insbesondere ist K nicht-degeneriert auf $\mathfrak{h}$. Daher existiert für alle Wurzeln α ein $H_\alpha \in \mathfrak{h}$, sodass $K(H_\alpha, x) = \alpha(x)$ für $x \in \mathfrak{h}$. Dieses H_α ist eindeutig.
iv) $\alpha \in \Delta \implies -\alpha \in \Delta$
v) Die Killing-Form auf $\mathfrak{h}$ ist $K(h, h') = \sum_{\alpha\in\Delta} \alpha(h)\alpha(h')$.
vi) Δ spannt $\mathfrak{h}^*$ auf.

Lemma 7.20 (Halbeinfache LA enthalten $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$-Kopien) *Sei $E_\alpha \neq 0 \in \mathfrak{g}_\alpha$ und wähle $E_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$, so dass $K(E_\alpha, E_{-\alpha}) = 1$. Dann gilt $[E_\alpha, E_{-\alpha}] = H_\alpha$ (H_α wie vorher). Ausserdem ist $\alpha(H_\alpha) \neq 0$ und*

$$h = \frac{2}{\alpha(H_\alpha)}H_\alpha, \quad e = \frac{2}{\alpha(H_\alpha)}E_\alpha, \quad f = E_{-\alpha},$$

spannen eine Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ auf, die isomorph ist zu $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ (Kommutatorrel erfüllt).

Def'n 7.21 (Duale Bilinearform $\langle\cdot,\cdot\rangle$) *Wir definieren auf $\mathfrak{h}^*$ eine Bilinearform $\langle\cdot,\cdot\rangle$ dual zur Killingform: $\langle\alpha,\beta\rangle = K(H_\alpha,H_\beta) = \alpha(H_\beta)$ für $\alpha,\beta\in\Delta$, H_α, H_β wie vorher.*

Def'n 7.22 ($\mathfrak{h}_0$, $\mathfrak{h}_0^*$)

$$\mathfrak{h}_0 = \mathbb{R}\text{-span}_{\alpha\in\Delta} H_\alpha \subset \mathfrak{h}, \qquad \mathfrak{h}_0^* = \mathbb{R}\text{-span}_{\alpha\in\Delta}\alpha$$

Theorem 7.23 ($\mathfrak{h}_0$, $\mathfrak{h}_0^*$, Skalarprodukt) *Es gilt $\mathfrak{h}_0\otimes\mathbb{C} = \mathfrak{h}$ und $\mathfrak{h}_0^*\otimes\mathbb{C} = \mathfrak{h}^*$. Insbesondere $\dim_\mathbb{R}\mathfrak{h}_0 = \dim_\mathbb{R}\mathfrak{h}_0^* = \frac{1}{2}\dim_\mathbb{R}\mathfrak{h} =: r$. Ausserdem ist $K(\cdot,\cdot)$ positiv definit, also ein Skalarprodukt auf $\mathfrak{h}_0$ und $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt auf $\mathfrak{h}_0^*$, wobei $\langle\alpha,\beta\rangle = K(H_\alpha,H_\beta)$.*

Remark 7.24 *Insbesondere $\langle\alpha,\lambda\rangle = \lambda(H_\alpha)$.*

Remark 7.25 $\mathfrak{h}_0^* \cong \mathbb{R}^{n-1} \cong \left\{(\lambda_1,\dots,\lambda_n)^T \,|\, \sum_j \lambda_j = 0, \lambda_j\in\mathbb{R}\right\}$.

Remark 7.26 $2\frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle} \in \{0,\pm1,\pm2,\pm3\}$

Remark 7.27 (Ordnung auf den Wurzeln) *Wähle zB. eine Basis $H_{\beta_1},\dots,H_{\beta_r}$ von $\mathfrak{h}_0$ ($\beta_j\in\Delta$). Dann ist $0\neq\lambda\in\mathfrak{h}_0^*$ als positiv definiert ($\lambda>0$), wenn die erste Zahl $\neq 0$ in $\lambda(H_{\beta_1}),\dots,\lambda(H_{\beta_r})$ grösser als 0 ist. Wir sagen λ ist negativ, falls $-\lambda$ positiv ist. Wir sagen $\lambda>\lambda'$, falls $\lambda-\lambda'>0$.*

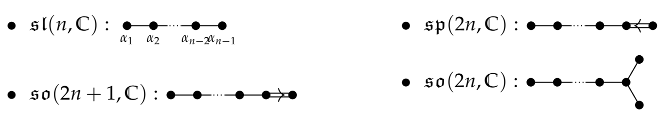
Def'n 7.28 (Einfache Wurzeln) *Eine Wurzel $\alpha\in\Delta$ heisst* ***einfach****, wenn $\alpha>0$ und sie nicht als Summe von 2 positiven Wurzeln geschrieben werden kann. Sei $\Pi\subset\Delta$ die Menge der* ***einfachen Wurzeln****.*

Theorem 7.29 (Einfache Wurzeln bilden Basis von $\mathfrak{h}_0^*$) *Also insbesondere $|\Pi| = r$. Zudem kann jede positive Wurzel geschrieben werden als $\sum_{j=1}^r n_j\alpha_j$ mit $\Pi = \{\alpha_1,\dots\alpha_r\}, n_j\in\mathbb{N}_0$.*

Def'n 7.30 (Dynkin Diagramm) *Das* ***Dynkin Diagramm*** *einer halb-einfachen Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ist folgender Graph:*

- *Knoten sind die einfachen Wurzeln Π.*
- *Für $\alpha,\beta\in\Pi$, $\alpha\neq\beta$ werden die zugehörigen Knoten mit $\frac{4\langle\alpha,\beta\rangle^2}{\langle\alpha,\alpha\rangle\langle\beta,\beta\rangle}$ ($= 4\cos^2$(Winkel zwischen α und β)) Strichen verbunden.*
- *Falls $\langle\alpha,\alpha\rangle > \langle\beta,\beta\rangle$, dann zeichnen wir einen Pfeil $\rightarrow$.*

Remark 7.31 *Beispiele von Dynkin Diagrammen:*



Theorem 7.32 (Isomorphie über Dynkin-Diagramm) *Zwei halbeinfache Lie-Algebren sind isomorph genau dann, wenn ihre Dynkin-Diagramme gleich (isomorph) sind.*

7.4 Darstellungstheorie (komplexer) halbeinfacher Lie-Algebren

Sei wieder $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Lie-Algebra, $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{g}$ eine Cartan-Unteralgebra, $\Delta\subset\mathfrak{h}^*$ (sodass $K(H_\alpha,x) = \alpha(x)$ für alle $x\in\mathfrak{h}$) die Wurzeln und $H_\alpha\in\mathfrak{h}$ wie vorher.

Lemma 7.33 *Sei $\rho:\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(V)$ eine endl. dim. Darstellung. Dann ist $\rho(H_\alpha)$ diagonalisierbar und die Eigenwerte sind Vielfache von $\frac{1}{2}\langle\alpha,\alpha\rangle$. Insbesondere sind alle $\rho(x)$, $x\in\mathfrak{h}$ diagonalisierbar.*

Wir haben die gemeinsame Eigenraumzerlegung

$$V = \bigoplus_{\lambda\in W_f} V_\lambda$$

mit $W_f\subset\mathfrak{h}^*$ die gemeinsamen Eigenwerte (Gewichte) und $V_\lambda = \{v\in V|\forall x\in\mathfrak{h}: \rho(x)v = \lambda(x)v\}$.

Remark 7.34 (Ladderoperators auf ρ) *Es gilt $\rho(E_\alpha)V_\lambda\subset V_{\lambda+\alpha}$ für alle $E_\alpha\in g_\alpha$.*

Remark 7.35 (Alle Gewichte sind reell) *Wegen des Lemmas: $\frac{2\lambda(H_\alpha)}{\langle\alpha,\alpha\rangle} = \frac{2\langle\lambda,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}\in\mathbb{Z}$. Insbesondere ist $\lambda\in\mathfrak{h}_0^*$, also $W_\rho\subset\mathfrak{h}_0^*$.*

Def'n 7.36 (Ganzzahlige Gewichte) *Ein $\lambda\in\mathfrak{h}_0^*$ heisst (algebraisch)* ***ganzzahlig****, falls $\frac{2\langle\lambda,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}\in\mathbb{Z}$ für alle $\alpha\in\Delta$.*

Remark 7.37 *Es reicht, dies für alle einfachen Wurzeln, also $\alpha\in\Pi$ zu verlangen.*

Def'n 7.38 (Dominante Gewichte) *Ein $\lambda\in\mathfrak{h}_0^*$ heisst* ***dominant****, falls $\langle\lambda,\alpha\rangle\geq 0$ für alle einfachen Wurzeln $\alpha\in\Pi$ ($\iff\forall\alpha\in\Delta:\langle\lambda,\alpha\rangle>0$).*

Lemma 7.39 *Das höchste Gewicht einer endl. dim. Darstellung ist dominant (u. ganzzahlig).*

Theorem 7.40 (Klassifikation irred. Darstellungen halbeinfacher Lie-Algebren) *Die Abbildung $\rho\to\lambda$, die einer endl. dim. Darstellung ρ der halbeinfachen Lie-Algebren $/\mathbb{C}$ ihr höchstes Gewicht zuordnet, erzeugt eine Bijektion*

$$\{\mathfrak{g}\text{-Irrep}\}\,/\,\textit{Isomorphie} \xleftrightarrow{1:1} \{\textit{dominante, ganzzahlige Elemente von } \mathfrak{h}_0^*\}\,.$$

Theorem 7.41 (Halbeinfache LA $\implies$ vollst reduzibel) *Jede endl. dim. Darstellung einer halbeinfachen Lie-Algebra ist vollständig reduzibel, also isomorph zu einer direkten Summe irreduzibler Darstellungen $V = \bigoplus_j V_j$.*

TODO young diagramme

8 Lorentzgruppe

8.1 Minkovskiraum und Lorentzgruppe

Def'n 8.1 (Minkovskiraum) *Der Minkovskiraum ist $\mathbb{R}^4$ versehen mit der symmetrischen Bilinearform ("Minkovskimetrik")*

$$\langle x,y\rangle = x_0y_0 - \textstyle\sum_{i=1}^3 x_iy_i,\ x = (x_0,x_1,x_2,x_3)^T\in\mathbb{R}^4$$

Die Matrix der Linearform ist $g = \operatorname{diag}(1,-1,-1,-1)$. Physikalisch ist $x_0 = ct$ die Zeitkoordinate, $\vec{x} = (x_1,x_2,x_3)$ die Ortskoordinate eines Ereignisses.

Def'n 8.2 (Artigkeit) *Ein Vektor $x\in\mathbb{R}^4$ heisst* ***zeitartig****, falls $\langle x,x\rangle>0$;* ***raumartig****, falls $\langle x,x\rangle<0$;* ***lichtartig****, falls $\langle x,x\rangle = 0$.*

Def'n 8.3 (Lorentzgruppe) *Die Lorentzgruppe ist*

$$\begin{aligned} O(1,3) &= \{A\in GL(4,\mathbb{R})|\langle Ax,Ay\rangle = \langle x,y\rangle\ \forall x,y\in\mathbb{R}^4\} \\ &= \{A\in GL(4,\mathbb{R})|\langle Ax,Ax\rangle = \langle x,x\rangle\ \forall x\in\mathbb{R}^4\} \\ &= \{A\in GL(4,\mathbb{R})|A^TgA = g\} \end{aligned}$$

Das zweite Gleichheitszeichen gilt wegen der Polarisierung: $2\langle x,y\rangle = \langle x+y,x+y\rangle - \langle x,x\rangle - \langle y,y\rangle$

Def'n 8.4 (Orthonormalbasis) *Eine Basis $\{b_0,b_1,b_2,b_3\}$ des $\mathbb{R}^4$ heisst orthonormiert, falls gilt $\langle b_i,b_j\rangle = g_{ij}$ für alle $i,j = 0,1,2,3$.*

Remark 8.5 *Ein zeitartiger Einheitsvektor hat immer die Form $(\pm\cosh\alpha\sinh\alpha\cdot\vec{n}), \vec{n}\in\mathbb{R}^3, \|\vec{n}\| = 1$.*

Remark 8.6 (Zeitumkehr, Raumumkehr, Rotation) *Eine 4x4 Matrix ist genau in $O(1,3)$, wenn die Zeilen (oder Spalten) eine ONB des $\mathbb{R}^4$ in obigen Sinne bilden. Beispiele für Elemente in $O(1,3)$ sind die Lorentzrotationen für $R\in O(3)$, die Zeitumkehr T, die Raumumkehr P definiert als*

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & R\end{bmatrix},\quad T = \operatorname{diag}(-1,1,1,1),\quad P = \operatorname{diag}(1,-1,-1,-1).$$

Def'n 8.7 (Untergruppen von $O(1,3)$) *Folgende UG definieren wir*

$$\begin{aligned} O_+(1,3) &= \{A\in O(1,3)|A_{00}>0\} \\ SO(1,3) &= \{A\in O(1,3)|\det(A) = 1\} \\ SO_+(1,3) &= O_+(1,3)\cap SO(1,3) \end{aligned}$$

Theorem 8.8 (Zusammenhang) *$SO_+(1,3)$ ist zusammenhängend. $O(1,3)$ zerfällt in vier Zusammenhangskomponenten:*

$$O(1,3) = SO_+(1,3)\sqcup PSO_+(1,3)\sqcup TSO_+(1,3)\sqcup PTSO_+(1,3)$$

8.2 Homomorphismus $SL(2,\mathbb{C})_\mathbb{R}\to SO_+(1,3)$

Sei $H = \{X\in\mathbb{C}^{2\times2}|X^\dagger = X = \{x_1\sigma_1+x_2\sigma_2+x_3\sigma_3+x_0\mathbb{1}|x_i\in\mathbb{R}\}\}$

Lemma 8.9 *Für $\hat{x} = x_1\sigma_1+x_2\sigma_2+x_3\sigma_3+x_0\sigma_0$ ($\sigma_0 = \mathbb{1}$) gilt $\det\hat{x} = \langle x,x\rangle$.*

Theorem 8.10 *Der Homomorphismus $\rho: SL(2,\mathbb{C})_\mathbb{R}\to GL(H), \rho(A)X = AXA^\dagger\in H$ ist eine Darstellung. Ausserdem kann man zeigen, dass $\rho: SL(2,\mathbb{C})_\mathbb{R}\to SO_+(1,3)$, Homomorphismus von Lie-Gruppen.*

Remark 8.11 *Betrachte den Homomorphismus auf den Lie-Algebren $\nu = D\rho(1)$: $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})_\mathbb{R}\to\mathfrak{so}(1,3)$. Eine Basis von $\mathfrak{so}(1,3)$ ist gegeben durch $L_j = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & \tilde{L}_j\end{bmatrix}$, $\tilde{L}_j$ Basis von $\mathfrak{so}(3)$ und B_1,B_2,B_3 (siehe Anhang).*
$\nu(\sigma_j)$ wirk auf H wie $X\in H\mapsto\sigma_jX+X\sigma_j$. Daraus erhält man $\nu(\sigma_j) = 2B_j, \nu(-i\sigma_j) = 2L_j$. Also ist nu ein Isomorphismus und $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})_\mathbb{R}\cong\mathfrak{so}(1,3)$

Theorem 8.12 *Sei $\mathfrak{g}$ eine komplexe Lie-Algebra. Dann gilt*

$$\mathfrak{g}_\mathbb{R}\otimes\mathbb{C}\cong\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}\,.$$

Remark 8.13 $\mathfrak{su}(2)\otimes\mathbb{C}\oplus\mathfrak{su}(2)\otimes\mathbb{C}\cong\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})\oplus\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})\cong\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})_\mathbb{R}\otimes\mathbb{C}\cong\mathfrak{sl}(1,3)\otimes\mathbb{C}$.

8.3 Darstellungen der Lorentzgruppe

Da $\mathfrak{so}(1,3)\otimes\mathbb{C}\cong\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})\oplus\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, sind die irreduziblen komplexen endl dim Darstellungen von $\mathfrak{so}(1,3)$ gerade die von $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})\oplus\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$.

Theorem 8.14 (Irreps von $\mathfrak{g}\oplus\tilde{\mathfrak{g}}$) *Seien $\mathfrak{g}$, $\tilde{\mathfrak{g}}$ komplexe halbeinfache Lie-Algebren. Dann sind die komplexen endl dim Irreps von $\mathfrak{g}\oplus\tilde{\mathfrak{g}}$ gerade die Darstellungen $\rho = \rho_\lambda\otimes\rho_{\tilde{\lambda}}$: $\mathfrak{g}\oplus\tilde{\mathfrak{g}}\to\mathfrak{gl}(V_\lambda\otimes V_{\tilde{\lambda}})$, wobei $\rho_\lambda:\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(V_\lambda), \rho_{\tilde{\lambda}}:\tilde{\mathfrak{g}}\to\mathfrak{gl}(V_{\tilde{\lambda}})$ Irreps von $\mathfrak{g}$, $\tilde{\mathfrak{g}}$ sind. Hier ist $\rho(x+\tilde{x})(u\otimes v) = (\rho_\lambda(x)u)\otimes v + u\otimes(\rho_{\tilde{\lambda}}(\tilde{x}))v$, $x\in\mathfrak{g}, \tilde{x}\in\tilde{\mathfrak{g}}$.*

A Wichtige Räume

Allgemein

$H = \{X\in\mathbb{C}^{2\times2}|X^\dagger = X = \{x_1\sigma_1+x_2\sigma_2+x_3\sigma_3+x_0\mathbb{1}|x_i\in\mathbb{R}\}\}$
$H_0 = \{X\in\mathbb{C}^{2\times2}|X^\dagger = X, \operatorname{tr}(X) = 0\}$ mit $\langle X,Y\rangle = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(XY)$
$H_\ell = \{p\in\mathbb{C}[x_1,x_2,x_3]|p$ homogen von Grad $\ell, \Delta p = 0\}$
$U_n = \{p\in\mathbb{C}[z_1,z_2]|p$ homogen von Grad $n\}$

B Matrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad \sigma_2 = \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix},\quad \sigma_3 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \qquad \text{(Pauli)}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix}0 & \mathbb{1}\\ \mathbb{1} & 0\end{pmatrix};\quad \Omega = \begin{pmatrix}0_{n\times n} & \mathbb{1}_{n\times n}\\ -\mathbb{1}_{n\times n} & 0_{n\times n}\end{pmatrix};\quad (I_{p,q})_{ij} = \begin{cases}\delta_{ij} & i\leq p\\ -\delta_{ij} & p<i\end{cases}, \text{ wobei } p+q = n;$$

C Darstellungen

Darstellungen von Gruppen

Trivial $\rho_{\text{triv}}: G\to GL(V), g\mapsto\mathbb{1}_V$
Adjungiert $\rho_{\text{adj}}: G\to GL(G), g\mapsto\rho_{\text{adj}}(g)$ mit $\rho_{\text{adj}}(g)h = ghg^{-1}$
Determinante Determinante der Darstellungsmatrix der definierenden Darstellung.
Regulär Siehe Kapitel 3.3.
Alternierend $g\in S_n\mapsto\operatorname{sgn}(g)$

Darstellungen von Lie-Algebren

Trivial Nullabbildung $\rho = 0$
Adjungiert $\operatorname{ad}:\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{g}), x\mapsto\operatorname{ad}_x$ mit $\operatorname{ad}_x(y) = [x,y]$, wobei $y\in\mathfrak{g}$
"Üblich" $\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{g}), x\mapsto x$
Polynome Von $SL(2,\mathbb{C})$ auf U_n durch ($A\in SL(2,\mathbb{C}), p\in U_n$): $(\nu(A)p)(x) = p(A^{-1}x)$

D Satz vom regulären Wert und Ableitungen

Theorie

Def'n D.1 (Regulärer Wert) *einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist ein Punkt a, in dem die Ableitung $D_x f$ surjektiv in jedem $x \in f^{-1}(a)$ ist.*

Theorem D.2 (Regulärer Wert) *Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine glatte Abbildung und $a \in \mathbb{R}^n$ ein regulärer Wert von f. Dann ist $M = f^{-1}(a) \subset \mathbb{R}^n$ eine glatte Untermannigfaltigkeit der Dimension $n-m$ und der Tangentialraum in $x \in M$ ist $T_x M = \ker(D_x f)$.*

Remark D.3 *Gegeben $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, dann lässt sich $(D_A f)(B)$ berechnen mit einem Weg $\gamma(t) = f(\varphi(t))$ mit $\varphi(0) = A, \dot\varphi(0) = B$, s. d.: $\frac{d\gamma(t)}{dt}\big|_{t=0} = (D_A f)(B)$*

Ableitungen

$D_A \det : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R} : B \mapsto \det(A)\mathrm{tr}(A^{-1}B)$, $\quad D_{\mathbb{1}} \det : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R} : B \mapsto \mathrm{tr}(B)$

$F : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathrm{A} : B \mapsto B^T S B - C$ und $D_{\mathbb{1}} F : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathrm{A} : B \mapsto B^T S + SB$, wobei häufig $\mathrm{A} \in \{\mathrm{Sym}(n), \mathrm{Antisym}(n)\}$.

Sujektivität

Zeige Surjektivität für $D_{\mathbb{1}}F$ durch $\frac{1}{2}SB^T$ mit $B \in \mathrm{A}$, da $D_{\mathbb{1}}F\left(\frac{1}{2}SB^T\right) = B$.

E Lösungsstrategien

E.1 Symmetrien eines Körpers

Gegeben ein Körper K in $\mathbb{R}^3$, definiert durch eine Menge P von Punkten $\{p_1, ..., p_n\} \subset \mathbb{R}^3$ und Verbindungskanten.

Symmetriegruppe finden: Gesucht ist die Untergruppe G der euklidischen Gruppe $E(3)$, die K auf K abbildet. Falls $G \to Bij(P)$ injektiv ist, kann die Wirkung jeder Symmetrie durch Wirkung auf die Punkte identifiziert werden (bei einer 2-dim Fläche in $\mathbb{R}^3$ ist dies nicht der Fall, Identität und Spiegelung an Fläche sind für alle Punkte auf Fläche identisch).

Wähle Punkt $p_i \in P$, dann ist jedes $g \in G$ Komposition von einem $g_{orb} \in Orbit_{p_i}$ und einem $g_s \in Stab_{p_i}$: $g = g_{g\cdot p_i}(g_{g\cdot p_i}^{-1} g)$. Berechne $Orbit_{p_i}, Stab_{p_i}$, G ist dann das die Menge der Produkte von Elementen aus den beiden Mengen.

Isomorphie zu G' zeigen: Finde Bijektion $\varphi : G \to G'$, die Gruppenhom.eigenschaft erfüllt. Ist G' durch erzeugende Elemente und Relationen definiert, reicht es die Relationen für $\varphi(G)$ zu zeigen (und φ Bijektion).

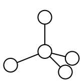
Irreps von G finden: Betrachte Darstellung ρ von G auf $\mathbb{C}^3 n$, dem VR, der den Auslenkungen der Punkte von ihrer Ausgangslage entspricht. Jede Symmetrie von K wirkt in dieser Darstellung nun durch definierende Transformation des Raumes auf die Punkte, welche die Punkte im Raum nur permutiert, multipliziert mit der Inversen ebendieser Permutation, s.d. die Punkte tatsächlich auf sich selbst abgebildet werden.

Die räumliche Transformation wird durch 3×3 Matrizen $\rho'(g)$ dargestellt, welche wiederum entsprechend der Permutation der Punkte in der $3n \times 3n$ Darstellungsmatrix $\rho(g)$ verteilt sind.

Für Charakter χ_ρ der Darst. ist Diagonale wichtig, d. h. falls k Punkte fix bleiben bei Symmetrie g, dann ist $\chi_\rho(g) = k \cdot \chi_{\rho'}(g)$.

Dies muss nur für je ein $g \in G$ pro Konjugationsklasse berechnet werden, dann lassen sich mithilfe der Charaktertafel der irreps von G die irreps in ρ finden.

E.2 Eigenschwingungen mit tetraedrischer Symmetrie



Wir betrachten eine tetraedrische Anordnung von vier Massen (m), die um ihre Ausgangslage schwingen. Die Bewegungsgleichung ist $m\ddot{x} = -\nabla U(x)$. Das Problem hat tetraedrische Symmetrie und somit wollen wir $U(\rho(g)x) = U(x)\ \forall g \in T$. Setze $U(0) = 0, \nabla U(0) = 0$ (Ruhelage). Mit $U(x) = x^T Ax$ und Ansatz $x = e^{i\omega t}v$ erhält man das Eigenwertproblem $\ddot{x} = -Ax, Av = \omega^2 v$.

i) **Symmetriegruppe T:** Wähle eine Ecke des Tetraeders und betrachte Bahn und Stabilisator. Stabilisator: Fixierung einer Ecke α reduziert das Problem auf D_3, $|\mathrm{Stab}_\alpha| = 6$. Bahn: Insgesamt vier Ecken, $|T \cdot \alpha| = 4$. $\overset{\text{Bahn-Stabilisator}}{\Longrightarrow} |T| = 24$.

ii) **Konjugationsklassen:** Die 5 Konjugationsklassen sind [1], $8[C_3]$ (Faktor 2 für zwei Richtungen, Faktor 4 für die Anzahl Ecken), $3[C_2]$, $6[\tau]$ (durch die Kanten), $6[S_4]$ (Achse wie C_2, aber drehen und spiegeln).

iii) **Charaktertafel:** Die erste Zeile wird mit der trivialen Darstellung V_1 gefüllt, die zweite mit der Determinante V_2. Eine dreidimensionale Darstellung V_4 ist gegeben durch die definierende Darstellung: $\rho_{\text{def}}(C_n) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (Rotation um z, $\theta = \frac{2\pi}{n}$) und $\rho_{\text{def}}(s) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (Spiegelung an xy-Ebene). Das Tensorprodukt liefert $V_2 \otimes V_4 = V_5$. Durch die Dimensionsformel $24 = \sum_{i=1}^5 \dim V_i$ erhalten wir $\dim V_3 = 2$ und die restlichen Einträge folgen wegen Orthogonalität der Zeilen und Spalten:

$24T$	[1]	$8[C_3]$	$3[C_2]$	$6\,[S_4]$	$6[\tau]$
V_1	1	1	1	1	1
V_2	1	1	1	-1	-1
V_3	2	-1	2	0	0
V_4	3	0	-1	-1	1
V_5	3	0	-1	1	-1

iv) **Kanonische Zerlegung:** Jeder der vier Kugeln in den Ecken wird ein Koordinatensystem zugeschrieben (siehe oben) und die Wirkung der Gruppenelemente gibt die reduzible Darstellung:

	[1]	$[C_4]$	$[C_2]$	$[S_4]$	$[\tau]$
χ_{red}	12	0	0	0	2

Skalarprodukt liefert $\chi_{\text{red}} = \chi_1 + \chi_3 + 2\chi_4 + \chi_5$

v) **Folgerungen für die Physik:** $A = c_1 \mathbb{1}_{V_1} \oplus c_3 \mathbb{1}_{V_3} \oplus \mathbb{1}_{V_4} \otimes \underbrace{M_4}_{2\times 2\text{ Matrix}} \oplus c_5 \mathbb{1}_{V_5}$. A hat maximal 5 Schwingungen und zwei sind degeneriert. Die Basis, bzgl. A die obige Form bekommt, erhalten wir mit den Projektoren, angewendet auf die ursprünglichen Basisvektoren.

E.3 Struktur und Darstellungen von $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$

Cartan Unteralgebra $\mathfrak{h} = \{\mathrm{diag}(x_1, \ldots, x_n) | \sum_i x_i = 0, x_i \in \mathbb{C} \forall i\}$

Eigenbasis der Elemente in $\mathfrak{h}$ Definiere $(E_{ij})_{k\ell} = \delta_{ki}\delta_{j\ell}$, dann ist $E_{ii} - E_{jj}$ eine Basis von $\mathfrak{h}$ und E_{ij} für $i \neq j$ eine Eigenbasis mit $\mathrm{ad}_x E_{ij} = (x_i - x_j)E_{ij}$. Somit haben wir $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{i\neq j} \mathfrak{g}_{\lambda_{ij}}$ mit $\mathfrak{g}_{\lambda_{ij}} = \mathrm{span}(E_{ij})$, $\lambda_{ij}(x) = x_i - x_j$.

Unteralgebren $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ Werden jeweils aufgespannt durch $E_{ij}, E_{ji}, E_{ii} - E_{jj}$.

Skalarprodukt für die Wurzeln Setze $\alpha = \lambda_{ij} \in \Delta$. Dann gilt $2n\mathrm{tr}(H_\alpha x) = x_i - x_j$, also $(H_\alpha)_{k\ell} = \frac{1}{2n}(\delta_{ik}\delta_{i\ell} - \delta_{kj}\delta_{\ell j})$. Es ist auch $\mathfrak{h} \cong \mathbb{C}^{n-1}$, also $\mathfrak{h}^* \cong \mathbb{C}^{n-1} \cong \{\lambda_1, \lambda_n | \sum_i \lambda_i = 0\}$. Prüfe, dass $\langle(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), (\lambda_1', \ldots, \lambda_n')\rangle = \frac{1}{2n}(\lambda_1\lambda_1' + \cdots + \lambda_n\lambda_n')$

Finde positive und einfache Wurzeln Definiere $H_{\beta_1} = \frac{1}{2n}\mathrm{diag}(1, \ldots, -1), \ldots, H_{\beta_{n-1}} = \frac{1}{2n}\mathrm{diag}(0, \ldots, 1, -1)$. Mit dieser Wahl sind $e_i - e_j, i < j$ positive Wurzeln. Die einfachen Wurzeln sind $e_i - e_{i+1}, i = 1, \ldots, n-1$.

Ganzzahlige Elemente Die ganzzahligen Elemenete sind (mit Skalarprodukt und einfachen Wurzeln von oben) $\mathbb{Z}$-Linearkombinationen von $v_1 = (1, 0, \ldots)^T, \ldots, v_{n-1} = (1, \ldots, 1, 0)^T$

Dominante, ganzzahlige Gewichte Sind $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}, 0), \lambda_i \in \mathbb{Z} \forall i$ und $\lambda_i \geq \lambda_{i+1} \forall i$. Sie können als Young-Diagramm dargestellt werden mit λ_i vielen Kästchen in der i-ten Zeile.

F Isomorphismen von Lie Algebren und Lie Gruppen

Definitionen:

$$H_0 = \{X \in \mathbb{C}^{2\times 2} | X^\dagger = X, \mathrm{tr}(X) = 0\} \text{ mit } \langle X, Y\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(XY)$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{SU}(2) \arrow[rr, "{\rho, \mathrm{Ker}\rho = \{\pm 1\}}", "{X \in H_0 : \rho(A)X = AXA^\dagger}"'] & & \mathrm{SO}(3) & \\
\mathfrak{su}(2) \arrow[u, two heads, "\exp"] \arrow[rr, "{D_1\rho 1, \cong}", "u_j \mapsto -2L_j"'] & & \mathfrak{so}(3) \arrow[u, two heads, "\exp"] & \\
\mathfrak{su}(2) \otimes \mathbb{C} \arrow[u, "\mathbb{R}"] & & \mathfrak{so}(3) \otimes \mathbb{C} \arrow[u, "\mathbb{R}"] & \mathfrak{so}(1,3) \\
& \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \arrow[ul, "\cong", "{\substack{2h \mapsto -i\sigma_3 \\ 2e \mapsto \sigma_1 + i\sigma_2 \\ 2f \mapsto \sigma_1 - i\sigma_2}}"'] \arrow[ur, "\cong"', "{\substack{h \mapsto 2iL_3 \\ e \mapsto iL_1 - L_2 \\ f \mapsto iL_1 + L_2}}"] \arrow[urr, "\cong"', "{\substack{\sigma_j \mapsto 2B_j \\ -i\sigma_j \mapsto 2L_j}}"] & &
\end{tikzcd}$$

- $\mathrm{SU}(2) \cong \mathbb{S}^3$ einfach zusammenhängend
- $\mathrm{SO}(3) \cong \mathrm{SU}(2) \big/ \{\pm 1\} \cong \mathbb{S}^3 / \pm 1 \cong \mathbb{RP}^3$ mit $\mathbb{RP}^3$ der reelle projektive Raum, nicht einfach zusammenhängend

G Notizen aus den Übungsstunden, später schauen ob sie auch im Skript sind

- einfache Lie Algebren sind insbesondere nicht abelsch
- Normalteiler entspricht Ideal
- $U(n)$ für ungerade n können keine komplexen Lie-Gruppen sein
- Sei V die Darstellung von $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Dann gilt die Anzahl der irred. Darstellungstheorie in V gegeben durch $m = \dim V_0 + \dim V_1$.
- Alle Wurzelräume $\mathfrak{g}_\alpha$ sind eindimensional.
- Bei tensorierten Darstellungen findet man eine Darstellung, indem man die Es der Lie Algebra anwendet, bis es jeweils 0 ergibt, dann nimmt man das nächste E. zB. im Falle von $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ ist die Reihenfolge $[E_{21}, E_{31}, E_{32}, E_{12}, E_{13}, E_{23}]$

H Andere Random Facts, die ich mir noch mal anschauen will

- Die Anzahl Elt der Konjugationsklasse teilt die Gruppenordnung.
- $D_{nh} \cong D_n \times \mathbb{Z}_2$, aber $D_n \cong \mathbb{Z}_n \rtimes \mathbb{Z}_2$. Insbesondere kann man für D_n also nicht die Irreps aus den Irreps von $\mathbb{Z}_n$ bestimmen (Satz gilt nur für $\times$, nicht für $\rtimes$).
- Um zu zeigen, dass $\varphi : G \to H$ mit $|G| = |H|$ einen Isomorphismus definiert, reicht es, Surjektivität zu zeigen.
- Einschränkung (zB. von $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ auf $\mathfrak{su}(2)$) heisst, dass man die passende Basis betrachten muss.
- Basis $\mathfrak{so}(4)$: $L_1 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&-1 \\ 0&0&1&0 \end{pmatrix}, L_2 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&0&1 \\ 0&0&0&0 \\ 0&-1&0&0 \end{pmatrix}, L_3 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&-1&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} 0&1&0&0 \\ -1&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0&0&1&0 \\ 0&0&0&0 \\ -1&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0&0&0&1 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ -1&0&0&0 \end{pmatrix}$
- Sei $f : G \to G'$ Gruppenhomomorphismus. Dann ist $\mathrm{im} f \approx G/\ker f$

I Tensorprodukt

Seien V, W Vektorräume. Seien $(e_i)_{i\in I}$, $(f_i)_{i\in J}$ Basen von V, W. Dann ist $V \otimes W$ ein Vektorraum mit Basis $(c_{ij} = e_i \otimes f_j)_{(i,j)\in I\times J}$ und $\dim(V \otimes W) = \dim V \dim W$.