MMPI

ETH Zurich

Marcel Graetz
Annina Lieberherr
Janik Schuettler

HS17

Contents

1 Fourierreihen

$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n \exp(\frac{2\pi i n}{L}x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{2\pi n}{L}x) + b_n \sin(\frac{2\pi n}{L}x)$

$f_n = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\exp(-\frac{2\pi i n}{L}x)\mathrm{d}x, \quad a_n = 2\mathrm{Re} f_n,\ b_n = -2\mathrm{Im} f_n$

1.1 Definition, Darstellungssatz

Lemma 1.1 $\frac{1}{L}\int_0^L e^{\frac{2\pi i n}{L}x}\mathrm{d}x = 0$ *für* $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ *und* $=1$ *für* $n=0$.

Satz 1.2 *Sei* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *so, dass* $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|f_n| < \infty$. *Dann konvergiert die Fourierreihe* $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n \exp(\frac{2\pi i n}{L}x)$ *absolut und gleichmässig für alle* $x\in\mathbb{R}$ *gegen eine periodische, stetige Funktion* f *der Periode L. Weiter gilt* $f_n = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\exp(-\frac{2\pi i n}{L}x)\mathrm{d}x$.

1.2 Riemann–Lebesgue-Lemma, Dirichletkern

Satz 2.1 (Riemann-Lebesgue) *Sei* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ *stetig und L-periodisch (bzw. Lebesgue-integrierbar auf* $[0,1]$*). Dann gilt* $f_n \to 0$ *für* $|n|\to\infty$.

Korollar 2.2 *Sei* $f \in C^k(\mathbb{R}/L\mathbb{Z})$. *Dann gilt* $|n|^k|f_n| \to 0$ *für* $|n|\to\infty$ *und somit* $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|f_n| \le C\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{|n|^k} < \infty$.

Definition 2.1 (Dirichlet-Kern) $D_N(t) = \sum_{n=-N}^{N}\exp(2\pi i n t)$. *Es gilt*

(i) $D_N = \begin{cases}\frac{\sin(\pi(2N+1)t)}{\sin(\pi t)} & t\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}\\ 2N+1 & t\in\mathbb{Z}\end{cases}$ *(iii)* $\int_0^1 D_N(t)\mathrm{d}t = 1$

(ii) $D_N(t+1) = D_N(t) = D_N(-t)$, *(iv)* $\int_0^1 |D_N(t)|\mathrm{d}t \ge \frac{4}{\pi^2}\log(2(n+1))$

Satz 2.3 (Darstellungssatz I) *Sei* $f \in C^1(\mathbb{R}/L\mathbb{Z})$. *Dann gilt* $f(x) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N} f_n\exp(\frac{2\pi i n}{L}x) = \lim_{N\to\infty}(s_N f)(x)$ *punktweise* $\forall x\in\mathbb{R}$.

Definition (Beschränkte Variation) *Eine Funktion* $[a,b]\to\mathbb{C}$ *heisst von* ***beschränkter Variation****, falls es eine Konstante V gibt, so dass* $\sum_{i=0}^{n-1}|f(x_{i+1})-f(x_i)| \le V$ *für alle Einteilungen* $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. *Wir schreiben* $f(a\pm 0) = \lim_{x\to a^\pm} f(x)$. *Stückweise stetig differenzierbare Funktionen sind von beschränkter Variation.*

Satz 2.4 (Darstellungssatz II) *Sei f L-periodisch und von beschränkter Variation auf* $[0,L]$ *und* $s_N f(x) = \sum_{n=-N}^{N} f_n \exp(\frac{2\pi i n}{L}x)$ *die N-te Partialsumme ihrer Fourierreihe. Dann gilt*

- $\lim_{N\to\infty} s_N f(x) = \frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0))$. *Insbesondere konvergiert die Fourierreihe gegen* $f(x)$ *in allen ihren Punkten x, wo f stetig ist.*
- *Die Konvergenz ist gleichmässig auf jedem abgeschlossenen Intervall* $I\subset\mathbb{R}$*, auf welchem f stetig ist.*

1.3 Reellwertige Darstellung der Fourierreihen

Für f reellwertig mit $f_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$, $f_{-n} = \overline{f}_n = \frac{1}{2}(a_n+ib_n)$ gilt $f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(\frac{2\pi n}{L}x) + b_n\sin(\frac{2\pi n}{L}x)$, wobei $a_n = 2\mathrm{Re}f_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)$, $b_n = -2\mathrm{Im}f_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)$. Es gilt $f_{-n} = \overline{f}_n$ für $n\ge 0$.

"Satz" *Sei f gerade, d.h.* $f(-x) = f(x)$*, L-periodisch und sei g ungerade, d.h.* $g(-x) = -g(x)$*, L-periodisch. Dann gilt*

(i) $\int_{-L}^{L} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^L f(x)\mathrm{d}x$,

(ii) $\int_{-L/a}^{L/a} g(x)\mathrm{d}x = 0$, $a\in\mathbb{R}\setminus 0$,

(iii) fg *ist ungerade,*

(iv) $f(x)\sin(n\pi x/L)$ *ist ungerade und daher* $b_n = 0$,

(v) $g(x)\cos(n\pi x/L)$ *ist ungerade und daher* $a_n = 0$.

Sei $F(x) = \int_0^x f(y)\mathrm{d}y$ für $f\in C^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ mit $\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x = 0$. Dann ist $F_n = \frac{f_n}{in}$, falls $n\ne 0$, und $F_n = -\sum_{m\ne 0}\frac{f_m}{im}$, falls $n = 0$.

1.4 Poisson'sche Summationsformel

Sei $f\in C^1(\mathbb{R})$, $|f|,|f'| \le \frac{C}{1+x^2}$ für ein $C>0$ und $g(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(x+kL)$, $g\in C^1(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z})$, $g(x+L) = g(x)$. Dann konvergiert diese Reihe gleichmässig auf $[0,L]$, also $g\in C^1(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z})$ und es gilt $g(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+nL) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} g_n\exp(\frac{2\pi i n}{L}x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{L}\hat{f}(2\pi n/L)\exp(\frac{2\pi i n}{L}x)$. Insbesondere folgt für $x=0$ die Poisson'sche Summationsformel $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(nL) = \frac{1}{L}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}\left(\frac{2\pi n}{L}\right)$. Gilt allgemein für f integrierbar, stetig und von beschränkter Variation.

1.5 Wärmeleitungsgleichung auf einem Ring

$$\begin{cases}\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = D\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) & x\in\mathbb{R},\ t>0,\\ u(x,0) = f(x).\end{cases} \qquad \text{(Wärmeleitungsgleichung)}$$

Periode $L>0$ und Konstante $D>0$ können durch passende Substitution von x,t als 2π bzw. 1 angenommen werden.

Satz 5.1 (Wärmeleitungsgleichung) *Sei* $f \in C^\infty(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ *und* $K(x,t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\exp(-n^2t+inx)$ *(Jacobische Theta-Funktion) für* $x\in\mathbb{R}$, $t>0$. *Dann ist* $u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K(x-y,t)f(y)\mathrm{d}y$ *eine* $C^\infty(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\times(0,\infty))$ *Lösung der Wärmeleitungsgleichung die gleichmässig gegen f für* $t\downarrow 0$ *konvergiert, d.h.* $\lim_{t\downarrow 0}u(x,t) = f(x)$. *Da* $u\in C^\infty$*, ist u eindeutig.*

Mit der Poisson-Formel ist $K(x,t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sqrt{\frac{\pi}{t}}\exp(-\frac{(x-2\pi n)^2}{4t}) > 0$.

1.6 Satz von Fejér

Definition 6.1 (Fejerschen-Summen) *sind arithmetische Mittel von Fourier-Partialsummen* $(\sigma_N f)(x) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}(s_n f)(x)$. *Also ist* $\sigma_N f(x) = \int_0^1 f(y)K_N(x-y)\mathrm{d}y$*, wobei der* ***Fejérsche Kern*** K_N *durch* $K_N(t) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}D_n(t)$ *gegeben ist.*

Satz (Eigenschaften des Fejérsche Kern) *Es gilt*

(i) $K_N(t) = K_N(-t) = K_N(t+1)$, *(ii)* $\int_0^1 K_N(t)\mathrm{d}t = 1$,

(iii) $K_N(t) = \begin{cases}\frac{1}{N}\left(\frac{\sin(N\pi t)}{\sin(\pi t)}\right)^2 & t\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}\\ N & t\in\mathbb{Z}\end{cases}$.

Satz 6.1 (Fejér, Darstellungssatz III) *Sei* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ *stetig, L-periodisch. Sei* $\sigma_N f$ *die N-te Fejérsche Summe* $\sigma_N f(x) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=-n}^{n} f_m\exp(\frac{2\pi i m}{L}x)$. *Dann gilt* $\lim_{N\to\infty}(\sigma_N f)(x) = f(x)$ *mit gleichmässiger Konvergenz.*

Definition 6.2 (Trigonometrische Polynome) *sind endliche Linearkombinationen* $\sum_{n=-N}^{N} c_n\exp(\frac{2\pi i n}{L}x)$

Korollar 6.2 *Jede stetige periodische Funktion f kann gleichmässig durch trigonometrische Polynome beliebig gut approximiert werden.*

Korollar 6.3 *Seien* f,g *stetig, L-periodiodisch. Dann gilt* $f_n = g_n \implies f = g$ *und* $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|f_n| < \infty \implies f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n\exp(\frac{2\pi i n}{L}x)$.

1.7 Rechnungen

f gerade $\Rightarrow f_n = f_{-n}$, f ungerade $\Rightarrow f_n = -f_{-n}$

Fourierkoeffizienten *Zuerst direkt. Falls Funktion zu hässlich zum Integrieren, e-Darstellungen von* $\sin,\cos$ *einsetzen,* $\exp$ *durch Taylorreihe ersetzen*

Beispiele *für Fourierkoeffizienten.* $f_n = 0$ *für nicht explizit angegebene* n
$\sin x$*:* $f_{\pm1} = \mp\frac{i}{2}$, $\cos x$*:* $f_{\pm1} = \frac{1}{2}$, $\sin^2 x$*:* $f_{\pm2} = -\frac{1}{4}$, $f_0 = \frac{1}{2}$, $\cos^2 x$*:* $f_{\pm3} = \pm\frac{i}{8}$, $f_{\pm1} = \mp\frac{3i}{8}$, $\exp(e^{ix}) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{inx}}{n!}$.

Fourierkoeffizienten mit Residuensatz *Sei* $f = \frac{1}{3-\cos x}$ 2π*-periodisch und reellwertig, deshalb* $f_{-n} = \overline{f_n}$. *Wir berechnen* f_{-n} *für* $n\ge 0$. *Mit der Substitution* $z = e^{ix}$, $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}z}{iz}$ *gilt* $f_{-n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{inx}}{3-\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})}\mathrm{d}x = -\frac{1}{\pi i}\int_{|z|=1}\frac{z^n}{z^2-6z+1}\mathrm{d}z$. *Finde Nullstellen des Nenners, die innerhalb des Einheitskreises liegen, um mit dem Residuensatz* f_{-n} *auszurechnen.* f_n *ergibt sich dann aus* f_{-n}*, wobei n-Abhängigkeiten in den Absolutbetrag gesetzt werden.*

PDE mit Fourierreihen (Wärmeleitungsgl.) *Nehme an, dass* $f\in C^\infty(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ *und sei u* C^∞*-Lösung mit* $u(x,t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n(t)e^{inx}$ *und* $u_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x,t)e^{-inx}\mathrm{d}x$.

- *Berechne* $u_n(0) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x,t)e^{-inx}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\mathrm{d}x = f_n$. *Falls also* $u(x,t)\to f$ *gleichmässig für* $t\to 0$*, ist* $u_n(0) = f_n$.
- *DGL in* u_n *über* $\partial_t u_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\partial_t u(x,t)e^{-inx}\mathrm{d}x \overset{DGL}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\partial_x^2 u(x,t)e^{-inx}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x,t)(-in)^2e^{-inx}\mathrm{d}x = -n^2u_n(t)$.
- *Lösung der DGL ist* $u_n(t) = e^{-n^2}f_n$*, woraus* $u(x,t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n e^{-n^2t+inx}$ *folgt.*
- *Zeige: 1)* $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\partial_t f_n e^{-n^2t+inx}|$, $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\partial_x^2 f_n e^{-n^2t+inx}| < \infty \Rightarrow$ *Ableitung und Summe können vertauscht werden, Alternativ: In* $\lim_{h\to 0}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{e^{-n^2h}-1}{h}(-n^2)^j(in)^k e^{-n^2t+inx}f_n$ *können limes und Summe vertauscht werden, da wegen* $|e^{-n^2h}-1| \le n^2|h|e^{n^2t/2}$ *für* $|h|\le t/2$ *die Partialsummen nicht mehr von h abhängen und damit glm. in h konvergieren.* $\Rightarrow$ *per Induktion beliebig oft nach t diffbar; analog für x, 2)* $u\in C^\infty$*, 3)* $\partial_t u = \partial_x^2 u$*, 4) Anfangsbedingungen* $|u(x,t)-f(x)| \le \sum_{n\in\mathbb{Z}}|e^{-n^2t}-1||f_n| \to 0$ *für* $t\to 0$.

2 Fouriertransformation

2.1 Definition und elementare Eigenschaften

Fouriertransformation *Sei* $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$. *Die Fouriertransformierte von f und die inverse Fouriertransformierte sind gegeben durch die Funktionen auf* $\mathbb{R}^n$

$$\hat{f}(k) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ik\cdot x}\mathrm{d}x, \quad \check{f}(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(k)e^{ik\cdot x}\mathrm{d}k.$$

Lemma 1.1 *Sei* $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$. *Dann sind die Funktionen* $\hat{f},\check{f}$ *gleichmässig stetig und für alle* $x,k\in\mathbb{R}^n$ *gilt* $|\hat{f}(k)| \le \|f\|_1$, $|\check{f}(x)| \le (2\pi)^{-n}\|f\|_1$.

Elementare Eigenschaften *Seien* $f,g,h\in L^1$, $h\in C_0^1(\mathbb{R}^n)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$, $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ *und bezeichne* $f_y(x) = f(x-y)$.

(i) $\widehat{\alpha f+\beta g} = \alpha\hat{f}+\beta\hat{g}$

(ii) $\widehat{f(\lambda\cdot)}(k) = |\lambda|^{-n}\hat{f}(k/\lambda)$

(iii) $\hat{f}_y(k) = \hat{f}(k)e^{-iky}$.

(iv) $f\hat{g},\hat{f}g\in L^1$

(v) $\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}g\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} f\hat{g}\mathrm{d}x$

(vi) $\overline{\hat{f}(k)} = \hat{\overline{f}}(-k)$

(vii) $\widehat{\partial_j h}(k) = ik_j\hat{h}(k)$

Satz 2.1 (Vertauschen von Ableitung und Integral) *Sei* $f:(a,b)\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ *eine Funktion, so dass*

(i) die Funktion $x\mapsto f(t,x)$ *integrierbar für alle* $t\in(a,b)$ *ist,*

(ii) die partielle Ableitung $f_t(t,x)$ *existiert für alle* $(t,x)\in(a,b)\times\mathbb{R}^n$,

(iii) es eine integrierbare Funktion g auf $\mathbb{R}^n$*, sodass* $|f_t(t,x)|\le g(x)$ *für alle* $(t,x)\in(a,b)\times\mathbb{R}^n$ *gibt.*

Dann ist $I(t) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t,x)\mathrm{d}x$ *differenzierbar für* $t\in(a,b)$ *und es gilt* $\frac{\partial I(t)}{\partial t} = \int_{\mathbb{R}^n} f_t(t,x)\mathrm{d}x$.

2.2 Fouriertransformierte der Gauss-Funktion

Beispiel (Gauss-Funktion) *Sei* $f(x) = e^{-\frac{1}{2}\langle Ax,x\rangle}$, $A = A^T$ *positiv definit. Dann ist* $f\in L^1$ *und* $\hat{f}(k) = \frac{(2\pi)^{n/2}}{(\det A)^{1/2}}e^{-\frac{1}{2}\langle A^{-1}k,k\rangle}$. *Im eindimensionalen Fall* $f(x) = e^{-|x|^2/2}$ *ist* $\hat{f}(k) = \sqrt{2\pi}e^{-k^2/2}$.
Allgemein ist $(e^{-\frac{x^2}{a}})^\wedge(k) = \sqrt{a\pi}e^{-\frac{ak^2}{4}}$ *und* $(e^{-\frac{k^2}{a}})^\vee(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{\pi}}e^{-\frac{ax^2}{4}}$

2.3 Beispiele für Fouriertransformierte

Beispiel (Charakteristische Funktion) $\hat{\chi}_{[-1,1]}(k) = \frac{2\sin k}{k}$.

Beispiel (Eigenvektoren der FT, Hermite-Funktionen) *Die Hermite-Funktionen* $h_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2}\partial_x^n e^{-x^2} = H_n(x)e^{-x^2/2}$, $n = 0,1,2,\ldots$ *sind Eigenvektoren der Fouriertransformation* $\hat{h}_m(k) = (-i)^m\sqrt{2\pi}h_m(k)$.

Beispiel (Invariante der FT) $\left(\frac{1}{\sqrt{|x|}}\right)^\wedge(k) = \frac{1}{\sqrt{|k|}}$.

Beispiel (Schranke) $\left(e^{-m|x|}\right)^\wedge(k) = \frac{2m}{m^2+k^2} \in L^1(\mathbb{R})$.

2.4 Umkehrsatz für L^1-Funktionen

Satz 4.1 $f,\hat{f} \in L^1 \implies f^{\wedge\vee} = f$ *und* $f,\check{f} \in L^1 \implies f^{\vee\wedge} = f$ *(f.ü.).*

Gleichheit in L^1, also fast überall. Für stetige Funktionen Gleichheit.

Korollar 4.2 ($^\wedge$, $^\vee$ injektiv) $^\wedge, ^\vee : L^1(\mathbb{R}^n) \to C(\mathbb{R}^n)$ *sind injektiv,* $f \in L^1(\mathbb{R}^n), \hat{f} = 0 \implies f = 0$ *(f.ü.),* $f \in L^1(\mathbb{R}^n), \check{f} = 0 \implies f = 0$ *(f.ü.).*

Korollar 4.3 $f,\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n) \implies f^{\wedge\wedge}(x) = (2\pi)^n f(-x)$ *(f.ü.).*

Korollar 4.4) $f,\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n) \implies \check{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Satz 4.5 (Plancherel-Formel) $f,\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n) \implies f,\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ *und es gilt*

$$\|f\|_2 = (2\pi)^{-n/2}\|\hat{f}\|_2.$$

Definition (Faltung) $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\mathrm{d}y = (g * f)(x)$.

Satz (Faltungssatz) $f,g \in L^1$. *Dann gilt* $(f*g)^\wedge(k) = \hat{f}(k)\hat{g}(k)$.

2.5 Der Schwartzraum $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$

Definition 5.1 (Multiindex) *ist ein Element* $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$. $x^\alpha = x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $\alpha! = \alpha_1!\ldots\alpha_n!$, $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1}\ldots\partial_n^{\alpha_n}$.

Definition (C^k-Raum) *Für* $X = \mathbb{R}^n$ *setze* $C(X) = \{f : X \to \mathbb{C} \text{ stetig}\}$. *Für* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *offen definiere* $C^k(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C} : \partial^\alpha f \in C(\Omega), \forall\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \le k\}$, $C^\infty = \cap_{k=0}^\infty C^k(\Omega)$.

Definition 5.2 ($\mathscr{S}$) *Für* $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *und* $\alpha,\beta \in \mathbb{N}^n$ *definieren wir* $\|\varphi\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n}|x^\alpha\partial^\beta\varphi(x)|$. *Der* ***Schwartzraum*** *ist der komplexe Vektorraum* $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \|\varphi\|_{\alpha,\beta} < \infty\ \forall\alpha,\beta \in \mathbb{N}^n\}$.

Lemma 5.1 (Norm auf $\mathscr{S}$) *Für alle* $k,l \in \mathbb{N}$ *ist* $\|\varphi\|_{k,l} = \max\limits_{|\alpha|\le k, |\beta|\le l}\|\varphi\|_{\alpha,\beta}$ *ist eine Norm auf dem Vektorraum* $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Beispiele und Eigenschaften

- *Beispiele von Schwartz-Funktionen sind glatte Funktionen mit kompaktem Träger* $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $e^{-a|x|^2}\ \forall a > 0$, $e^{-\sqrt{1+|x|^2}}$, $x^\alpha\partial^\beta\varphi$, $h_n \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.
- *Keine Schwartz-Funktionen sind nicht glatte Funktionen,* $e^{-a|x|}$, $(1+|x|^2)^{-s}$, $\frac{\varphi(x)}{x}$, $\int_{-\infty}^x \varphi(x)\mathrm{d}x \notin \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.
- *Polynome erhalten* $\mathscr{S}$, *also für* $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ *ist auch* $P(x)Q(x)\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ *für alle Polynome* P, Q. $\lim_{|x|\to\infty}|P(x)Q(\partial)\varphi(x)| = 0$.
- *Für* $\varphi,\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ *ist auch das punktweise Produkt* $\varphi\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ *im Schwartzraum (Leibnitz-Formel).*

Lemma 5.2 (Majorante in $\mathscr{S}$) *Seien* $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, $\beta \in \mathbb{N}^n$, $k \in \mathbb{N}$. *Dann existiert eine Konstante* $c_{\beta,k} = c_{\beta,k}(\varphi)$, *so dass* $|\partial^\beta\varphi(x)| \le \frac{c_{\beta,k}}{(1+|x|^2)^k}$.

Korollar 5.3 $\mathscr{S} \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ *für alle* $p \in [1,\infty)$.

Definition 5.3 (Konvergenz in $\mathscr{S}$) *Eine Folge* φ_j *in* $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ *konvergiert gegen* $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, *falls* $\lim_{j\to\infty}\|\varphi_j - \varphi\|_{k,l} = 0$ *für alle* $k,l \in \mathbb{N}$. *Man schreibt* $\varphi_j \xrightarrow{\mathscr{S}} \varphi$ *für* $j \to \infty$.

Definition 5.4 (Stetigkeit in $\mathscr{S}$) *Eine lineare Abbildung* $F : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ *ist stetig, falls für alle konvergenten Folgen gilt* $\varphi_j \xrightarrow{\mathscr{S}} \varphi \implies F(\varphi_j) \xrightarrow{\mathscr{S}} F(\varphi)$.

Lemma 5.4 (Fourier-Eigenschaften) *Sei* $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. *Dann gilt*

(i) $(\partial_j\varphi)^\wedge(k) = ik_j\hat{\varphi}(k)$, *(iii)* $(\partial_j\varphi)^\vee(k) = -ik_j\check{\varphi}(k)$,

(ii) $\partial_j\hat{\varphi}(k) = (-ix_j\varphi)^\wedge(k)$, *(iv)* $\partial_j\check{\varphi}(k) = (ix_j\varphi)^\vee(k)$.

Lemma 5.5 (Abgeschlossenheit) $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \implies \hat{\varphi},\check{\varphi} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Satz 5.6 (FT als Isomorphismus) *Die lineare Abbildung* $F : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) : \varphi \mapsto \check{\varphi}$ *ist bijektiv und stetig. Ihre Inverse* $F^{-1} : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) : \varphi \mapsto \check{\varphi}$ *ist ebenfalls stetig.*

2.6 Fouriertransformation von rotationsinverianten Funktionen

Definition (Rotationsinvariante Funktion) $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *ist eine Funktion, sodass* $g(Rx) = g(x)$ *für alle* R *orthogonal* $(R^TR = 1)$.

Lemma 6.1 (Rotationsinvarianz) *Eine Funktion* g *ist genau dann rotationsinv., wenn sie die Form* $g(x) = f(|x|)$, $|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ *hat.*

Wir führen als neue Koordinaten ein $x_1 = \pm r\sqrt{1 - y_2^2 - \ldots - y_n^2}$, $x_2 = ry_2, \ldots, x_n = ry_n$, wobei $x = ry$. Das Volumenelement ergibt sich als $\mathrm{d}x_1 \ldots = \mathrm{d}x_n = r^{n-1}\mathrm{d}r\frac{\mathrm{d}y_2\ldots\mathrm{d}y_n}{\sqrt{1-y_2^2-\ldots-y_n^2}} \equiv r^{n-1}\mathrm{d}r\mathrm{d}\Omega(y)$.

Lemma 6.2 ($|S^{n-1}|$) *Die "Oberfläche" der* $(n-1)$*-dimensionale Einheitssphäre* $S^{n-1} = \{y \in \mathbb{R}^n : |y| = 1\}$ *ist gegeben durch*

$$|S^{n-1}| = \int_{S^{n-1}}\mathrm{d}\Omega(y) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} = \begin{cases}\frac{2\pi^k}{(k-1)!} & n = 2k \quad \text{gerade} \\ \frac{2^{2k+1}\pi^k k!}{(2k)!} & n = 2k+1 \quad \text{ungerade}\end{cases}.$$

Beispiel $|S^1| = \frac{2\pi}{\Gamma(1)} = 2\pi$, $|S^2| = \frac{2\pi^{3/2}}{\Gamma(3/2)} = 4\pi$, $|S^3| = \frac{2\pi^2}{\Gamma(2)} = 2\pi^2$.

Definition (Gamma-Funktion) $\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}\mathrm{d}t$, $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$, $\Gamma(n+1) = n!$ *für* $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$

$g \in L^1$ rotationsinvariant $\implies$ $\hat{g}$ rotationsinvariant, da $\hat{g}(k) = \int_{\mathbb{R}^n} g(|x|)e^{-ik\cdot x}\mathrm{d}x = \int_0^\infty g(r)\left(\int_{S^{n-1}} e^{-ik\cdot yr}\mathrm{d}\Omega(y)\right)r^{n-1}\mathrm{d}r = \int_0^\infty g(r)G_n(|k|r)r^{n-1}\mathrm{d}r$, da $\hat{g}(k) = \hat{g}(|k|,0,\ldots,0)$.

Lemma 6.3 (G_n-Funktion) $G_n(\rho) = \int_{S^{n-1}} e^{-i\rho y_1}\mathrm{d}\Omega(y)$ *ist die Einschränkung auf* $\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{C}$ *einer ganzen holomorphen Funktion. Für alle* $k \in \mathbb{R}^n$ *gilt* $\int_{S^{n-1}} e^{-ik\cdot y}\mathrm{d}\Omega(y) = G_n(|k|)$ *(Insbesondere* $G_n(0) = |S^{n-1}|$*).*

Definition 6.1 (Besselfunktion) *Sei* $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{-1,-2,\ldots\}$. *Die Besselfunktion (erster Gattung) der Ordnung* α *ist die durch die konvergente Potenzreihe* $J_\alpha(z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\alpha+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\alpha+2k}$ *definierte Funktion der komplexen Variable z. Es sind* $J_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin(z)$ *und* $J_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos(z)$. *Weiters gilt* $\frac{d}{dz}(z^n J_n(z)) = z^n J_{n-1}(z)$

Satz 6.4 (FT für rotationsinvarianten Funktionen) *Sei* $n \ge 2$. *Dann gilt* $G_n(\rho) = (2\pi)^{n/2}\rho^{1-n/2}J_{n/2-1}(\rho)$. *Für integrierbare rotationsinvariant Funktionen* g *gilt* $\hat{g}(k) = (2\pi)^{n/2}|k|^{1-n/2}\int_0^\infty g(r)J_{n/2-1}(|k|r)r^{n/2}\mathrm{d}r$ *und* $\hat{g}(0) = |S^{n-1}|\int_0^\infty g(r)r^{n-1}\mathrm{d}r$. *In drei Dimensionen gilt insbesondere* $\hat{g}(k) = \frac{4\pi}{|k|}\int_0^\infty g(r)r\sin(|k|r)\mathrm{d}r$.

Bessel DGL *Die allgemeine Lösung der Bessel-Diffentialgleichung* $J_\alpha''(x) + \frac{1}{x}J_\alpha'(x) + (1 - \frac{\alpha^2}{x^2})J_\alpha(x) = 0$ *lautet* $C_1J_\alpha(x) + C_2J_{-\alpha}(x)$ *für* $\alpha \notin \mathbb{Z}$. *Für* $\alpha \notin \mathbb{Z}$ *sind* J_α *und* $J_{-\alpha}$ *linear unabhängig, für* $-n \in \mathbb{Z}_{<0}$ *linear abhängig, da* $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$. *Die Neumann-Funktion* $N_\alpha = \frac{\cos(\pi\alpha)J_\alpha(x) - J_{-\alpha}(x)}{\sin(\pi\alpha)}$ *ist für alle* α *definiert. Die Funktionen* J_α, N_α *bilden somit eine allgemeine Basis des Lösungsraums für alle* $\alpha \in \mathbb{C}$.

2.7 Regularität und Abfalleigenschaften

Regularität beinhaltet Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Analytizität.

Satz 7.1 (Majorante mit kompakten Träger) *Sei* $f \in C_0^s(\mathbb{R}^n)$. *Dann existiert eine Konstante c mit* $|\hat{f}(k)| \le \frac{c}{(1+|k|)^s}$.

Satz 7.2 (Riemann-Lebesgue) $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \implies \lim_{k\to\infty}\hat{f}(k) = 0$.

Satz 7.3 *(i) Sei* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *messbar,* $C, m > 0$, *sodass* $|f(x)| \le Ce^{-m|x|}$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$. *Dann hat* $\hat{f}$ *eine holomorphe Fortsetzung auf dem Streifen* $\{|\mathrm{Im}k| < m\}$, *ebenso* $\check{f}$.

(ii) Sei $m > 0$, $f : \{z : |\mathrm{Im}z| < m\} \to \mathbb{C}$ *holomorph und es gelte für alle* $|\eta| < m$ *sowohl* $f(\cdot + i\eta) \in L^1$ *als auch* $\max_{|\eta'|\le|\eta|}|f(x+i\eta')| \overset{|x|\to\infty}{\to} 0$. *Dann existiert zu jedem* $m' < m$ *eine Konstante* C', *sodass* $|\hat{f}(k)| \le C'e^{-m'|k|}$. *Dasselbe gilt für* $\check{f}$.

2.8 Wellengleichung

$$\begin{cases}\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \triangle u = 0 & x \in \mathbb{R}^n,\ t \ge 0, \\ u(x,0) = f(x), \\ \partial_t u(x,0) = g(x).\end{cases} \qquad \text{(Wellengleichung)}$$

Die Lösung $u(t,x)$ ist für $n = 2,3$ gegeben durch $u(t,x) =$

$$\frac{1}{2\pi c}\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\int_{|y|\le ct}\frac{f(x+y)\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2}{\sqrt{c^2t^2 - |y|^2}}\right) + \int_{|y|\le ct}\frac{g(x+y)\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2}{\sqrt{c^2t^2-|y|^2}}\right),$$

$$\frac{1}{4\pi c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\int_{|y|=ct} f(x+y)\mathrm{d}\Omega(y)\right) + \frac{1}{t}\int_{|y|=ct} g(x+y)\mathrm{d}\Omega(y)\right).$$

2.9 Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t} - \triangle u = 0 & x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0, \\ u(x,0) = f(x).\end{cases} \qquad \text{(Wärmeleitungsgleichung)}$$

Definition (Wärmeleitungskern) $K_t(x) = (e^{-k^2t})^\vee(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}e^{-|x|^2/(4t)}$.

Satz 9.1 (Lösung) *Sei* f *stetig und beschränkt auf* $\mathbb{R}^n$. *Dann ist* $u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} K_t(x-y)f(y)\mathrm{d}y$ $(= K * f)$ *eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung in* $C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ *und für alle* $x \in \mathbb{R}^n$ *gilt* $\lim_{t\to0^+} u(x,t) = f(x)$.

2.10 Rechnungen

f gerade $\Rightarrow \hat{f} \in \mathbb{R}$, f ungerade $\Rightarrow \hat{f} \in i\mathbb{R}$, $f \in \mathbb{R} \Rightarrow \operatorname{Re}(\hat{f})$ gerade und $\operatorname{Im}(\hat{f})$ ungerade.

Fouriertransformierte mit Residuensatz *Für reellwertige f ist $\hat{f}(-x) = \overline{\hat{f}(k)}$, deswegen genügt es $\hat{f}(-k)$ für $k \geq 0$ zu berechnen. Dann ist $\hat{f}(-k) = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)e^{ikx}\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} p>0} \operatorname{Res}(f,p) - \lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} f(x)e^{ikx}\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} p>0} \operatorname{Res}(f,p)$. Γ_R in der positiven oder negativen imaginären Ebene wählen, so dass $|\int_{\Gamma_R} f(x)e^{ikx}\mathrm{d}x| \leq \pi R \sup_{|x|=R} |f(x)e^{ikx}| \to 0$, wobei $e^{ikx} = e^{ik(a+ib)} = e^{k(ia-b)}$ mit $|a+ib| = R$. Für Γ_R in der positiven imaginären Ebene ist $b > 0$, also muss $k > 0$, für Γ_R in der negativen imaginären Ebene ist $b < 0$, also muss $k < 0$. Ist Γ_R negativ orientiert (Uhrzeigersinn, negative imaginäre Halbebene), hat $\operatorname{Res}(f,p)$ ein zusätzliches Minus.*

Lemma (Berechnung von Residuen)

(i) $\operatorname{ord}(f,p) \geq -1$, *dann* $\operatorname{Res}(f,p) = \lim_{z\to p}(z-p)f(z)$,

(ii) $\operatorname{ord}(f,p) = -k$, *dann* $\operatorname{Res}(f,p) = \frac{1}{(k-1)!}\partial_z^{k-1}((z-p)^k f(z))|_{z=p}$,

(iii) f holomorph an p, g hat eine einfache Nullstelle in p, dann ist $\operatorname{Res}(f,p) = \frac{f(p)}{g'(p)}$, insbesondere für $f \equiv 1$,

(iv) $\operatorname{ord}(f,p) = -1$, *$g$ holomorph auf $B_\varepsilon(p)$, dann ist* $\operatorname{Res}(f,p) = g(p)\operatorname{Res}(f,p)$.

PDE mit Fouriertransformation *Gesucht wird eine Lösung $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$. Nehmen wir an, dass $u \overset{x\to\infty}{\to} 0$ folgt mit $\hat{u}(k,t) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x,t)e^{-ik\cdot x}\mathrm{d}x$ bzw. über die Fouriertransformation der PDE die DGL $\frac{1}{c^2}\partial_t^2\hat{u}(k,t) = -k^2\hat{u}(k,t)$ mit allgemeiner Lösung $\hat{u}(k,t) = A(k)\cos(|k|ct) + B(k)\sin(|k|ct)$ bei festem k. Aus den Anfangsbedingungen folgt $\hat{u}(k,t) = \hat{f}(k)\cos(|k|ct) + \frac{\hat{g}(k)}{|k|c}\sin(|k|ct)$. Die Rücktransformation liefert $u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n}\left(\hat{f}(k)\cos(|k|ct) + \frac{\hat{g}(k)}{|k|c}\sin(|k|ct)\right)e^{ik\cdot x}\mathrm{d}k$. Für $f,g \in C_0^s(\mathbb{R}^n)$ ist $\hat{f}(k), \hat{g}(k) \leq C(1+|k|)^{-s}$ und für s gross genug (z.B. $\geq n+2$) kann man unter dem Integral ableiten, also ist u eine C^2-Lösung.*

Für $f \notin L^1(\mathbb{R}^n)$ kann ein **konvergenzerzeugender Faktor** eingeführt werden, d.h. $K_\delta(x) = f(x)e^{-\delta|x|^2/2} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, sodass z.B. $\hat{f}(k) = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{\delta\to 0} K_\delta(x)e^{-ikx}\mathrm{d}x = \lim_{\delta\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} K_\delta(x)e^{-ikx}\mathrm{d}x = \lim_{\delta\to 0}\hat{K}_\delta(k)$.

Beispiel (Konvergenzerzeugender Faktor) *Für $\hat{\psi}(t,k) = \hat{\varphi}(k)\hat{K}_\delta(k,t)$, $K_0 \notin L^1(\mathbb{R}^n)$ ist $\psi(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^n}\lim_{\delta\to 0}\hat{K}_\delta(k,t)\hat{\varphi}(k)e^{ikx}\mathrm{d}k = \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{K}_\delta(k,t)\hat{\varphi}(k)e^{ikx}\mathrm{d}k = \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^n}(K_\delta(\cdot,t) * \varphi)^\wedge(k)e^{ikx}\mathrm{d}k = \lim_{\delta\to 0}(K_\delta(\cdot,t) * \varphi)^{\wedge\vee}(x) = \lim_{\delta\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}K_\delta(y,t)\varphi(x-y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n}\lim_{\delta\to 0}K_\delta(y,t)\varphi(x-y)\mathrm{d}y = (K_0(\cdot,t)*\varphi)(x)$.*

Integrale von **Fouriertransformationen** mit cos und sin kann man zu neuen Funktionen umschreiben und erhält mit **partieller Integration** eine algebraische Gleichung für das Integral.

Beispiel (FT p.I) *Für $f(x) = e^{-|x|}\cos(x)$: $\hat{f}(k) = \int_0^\infty e^{-x}\cos(x)e^{-ikx}dx + \int_{-\infty}^0 e^x\cos(x)e^{-ikx}\mathrm{d}x = g(k) + g(-k)$ und $g(k) \overset{p.I}{=} \ldots \overset{p.I}{=} \frac{1}{1+ik} - \frac{1}{(1+ik)^2}g(k)$*

3 Orthogonale Funktionalsysteme, Hilbertraum

3.1 Die schwingende Saite

ist das lineare Problem $\frac{1}{c^2}\partial_t^2 u(x,t) = \partial_x^2 u(x,t)$, $x \in [0,L]$, $t \geq 0$, $u(t,0) \times u(t,L) = 0$ mit Anfangsbedingungen $u(x,0) = v(x)$, $\partial_t u(x,0) = w(x)$.

PDE über Separation *Wir suchen Lösungen der Form $u(x,t) = f(t)g(x)$. Einsetzen und Separieren nach x,t ergibt $\frac{1}{c^2}\frac{f''(t)}{f(t)} = \frac{g''(x)}{g(x)} = \lambda$.*

- *$\partial_x^2 g(x) = \lambda g(x)$, $x \in [0,L]$, $g(0) = g(L) = 0$ wird gelöst durch $g_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)$, $\lambda_n = -\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2$, $n = 1,2,3\ldots$,*
- *$f'' = \lambda c^2 f$ durch $f(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t$ mit $\omega = \sqrt{-c^2\lambda}$.*

Allgemein also $u(x,t) = (a_n\cos\omega_n t + b_n\sin\omega_n t)\sin\left(\frac{\omega_n}{c}x\right)$, wobei $\omega_n = \frac{\pi nc}{L}$, $n = 1,2,\ldots$. Da das Problem linear ist, ist auch jede Superposition $\sum_{n=1}^\infty(a_n\cos\omega_n t + b_n\sin\omega_n t)\sin\left(\frac{\omega_n}{c}x\right)$ eine Lösungs (falls a_n, b_n schnell genug abfallen für $n \to \infty$). Die Koeffizienten werden aus den Anfangsbedingungen $\sum_{n=1}^\infty a_n\sin\left(\frac{\omega_n}{c}x\right) = v(x)$ und $\sum_{n=1}^\infty \omega_n a_n\sin\left(\frac{\omega_n}{c}x\right) = w(x)$ als $a_n = \frac{2}{L}\int_0^L v(x)\sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)\mathrm{d}x$, $b_n = \frac{2}{\omega_n L}\int_0^L w(x)\sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)\mathrm{d}x$. Die Eigenfrequenzen sind gegebnen durch $\nu_n = \omega_n/2\pi$.

Bei linearen DGLs ist die Superposition zweier Lösungen wieder eine Lösung. Insbesondere kann man dann bei einem EW-Problem mit mehreren λ_is ansetzen.

3.2 Orthogonale Systeme, Hilberträume

l^2-Raum $l^2 = \{$*Folgen* $(\xi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *in* $\mathbb{C}$ *mit* $\sum_i |\xi_i|^2 < \infty\}$, $\langle\xi,\nu\rangle = \sum_i \overline{\xi_i}\nu_i$.

Lemma 2.1 (Schwarzsche Ungleichung) *Sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\cdot\rangle$ und $f,g \in V$. Dann gilt $|\langle f,g\rangle| \leq \|f\|\|g\|$ mit Gleichheit genau dann, wenn f und g linear unabhängig sind.*

Definition 2.1 (Konvergenz) *Eine Folge $(f_n)_{n=1}^\infty$ in einem VR mit Skalarprodukt V konvergiert gegen $f \in V$, falls $\|f_n - f\| \to 0$ für $n \to \infty$.*

Lemma 2.2 (Stetigkeit von Norm und Skalarprodukt) *Sei $(f_n)_{n=1}^\infty \subset V$ eine Folge, welche gegen $f \in V$ konvergiert. Dann gilt für alle $g \in V$ $\langle f_n, g\rangle \to \langle f,g\rangle$, $\langle g,f_n\rangle \to \langle g,f\rangle$ und $\|f_n\| \to \|f\|$.*

Definition 2.2 *Eine (endliche oder unendliche) Familie $(\varphi_j)_{j\in I}$ von nicht-verschwindenden Vektoren in V heisst **orthogonal** (oder **orthogonales System**), falls $\langle\varphi_j,\varphi_k\rangle = 0$ für alle $j \neq k$, **orthonormiert**, falls zusätzlich $\langle\varphi_j,\varphi_j\rangle = 1$ für alle $j \in I$. Ein orthogonales System $(\varphi_j)_{j\in I}$ heisst **vollständig** (oder **maximal**), falls $\langle\varphi_j, f\rangle = 0\ \forall j \implies f = 0$ für alle $f \in V$. Bei uns ist I meist $\{1,\ldots,n\}$, $\{(0),1,2,3,\ldots\}$ oder $\mathbb{Z}$.*

Beispiel *(i)* $V = L^2([0,1])$, $\varphi_j = e^{2\pi ijx}$, $\langle\varphi_j,\varphi_k\rangle = \int_0^1 \overline{\varphi_j}\varphi_k\mathrm{d}x = \delta_{jk}$

(ii) $V = \mathbb{C}^n$, $\varphi_j = (\delta_{1j},\ldots,\delta_{nj})$ *(iii)* $V = l^2$, $\varphi_j = (\delta_{ij})_{i\in\mathbb{N}}$

Satz 2.3 *Sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt und $(\varphi_j)_{j=1}^\infty$ ein orthogonales System.*

(i) ***(Pythagoras)*** $\|\varphi_1 + \ldots + \varphi_n\|^2 = \|\varphi_1\|^2 + \ldots + \|\varphi_n\|^2\ \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) ***(Bessel Ungleichung)*** *Ist (φ_j) orthonormiert, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ die Besselsche Ungleichung $\sum_{j=1}^n |\langle\varphi,\varphi_j\rangle|^2 \leq \|\varphi\|^2$ mit Gleichheit genau dann, wenn φ im vom $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ aufgespannten Unterraum liegt.*

(iii) ***(Funktionsapproximation)*** *Sei (φ_j) orthonormiert, $\varphi \in V$, $n \in \mathbb{N}$. Die Funktion von $\lambda_1,\ldots,\lambda_n \in \mathbb{C}$ $\|\varphi - \sum_{j=1}^n \lambda_j\varphi_j\|^2$ nimmt ihr Minimum für $\lambda_j = \langle\varphi_j,\varphi\rangle$ für $j = 1,\ldots,n$ an.*

Definition 2.3 (Hilbertraum) *Ein $\mathbb{C},\mathbb{R}$-Vektorraum H mit Skalarprodukt heisst **Hilbertraum**, wenn er bezüglich der Norm $f \mapsto \|f\| = \sqrt{\langle f,f\rangle}$ ein Banachraum ist, d.h. wenn alle Cauchy-Folgen bezüglich $\|\cdot\|$ in H konv.*

Satz 2.4 (Vollständigkeit) *Sei H ein Hilbertraum und $(\varphi_j)_{j=1}^\infty$ ein orthonormiertes System. Dann sind folgende Aussagen äquivalent*

(i) $(\varphi_j)_{j=1}^\infty$ *ist vollständig,*

(ii) $\varphi = \sum_{j=1}^\infty \langle\varphi_j,\varphi\rangle\varphi_j \quad \forall\varphi \in H$ *(Konvergenz in H)*,

(iii) $\|\varphi\|^2 = \sum_{j=1}^\infty |\langle\varphi_j,\varphi\rangle|^2 \quad \forall\varphi \in H$, ***(Parseval Identität)***.

Für $(\varphi_n)_{n=1}^\infty$ vollständig $\varphi = \sum_{n=1}^\infty \frac{\langle\varphi_n,\varphi\rangle}{\langle\varphi_n,\varphi_n\rangle}\varphi_n$, $\quad \|\varphi\|^2 = \sum_{n=1}^\infty \frac{|\langle\varphi_n,\varphi\rangle|^2}{\langle\varphi_n,\varphi_n\rangle}$.

Definition 2.5 *Ein Hilbertraum heisst **separabel**, falls er eine abzählbare orthonormierte Basis hat.*

Satz 2.5 *Sei $(\varphi_j)_{j=1}^\infty$ eine orthonormierte Basis eines Hilbertraums H. Dann existiert ein linearer Isomorphismus $i : l^2 \to H, c = (c_j)_{j=1}^\infty \mapsto \sum_{j=1}^\infty c_j\varphi_j$ und es gilt $\langle i(c), i(d)\rangle = \langle c,d\rangle$ für alle $c,d \in l^2$.*

Korollar 2.6 *Sei $(\varphi_j)_{j=1}^\infty$ eine orthonormierte Basis eines HR H. Dann konv. $\sum_{j=1}^\infty c_j\varphi_j = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^n c_j\varphi_j$ in H genau dann, wenn $\sum_{j=1}^\infty |c_j|^2 < \infty$.*

3.3 L^2-Theorie der Fourierreihen

Satz 3.1 (Parseval) *Sei $f \in L^2([0,1])$, $\varphi_j(x) = e^{2\pi ijx}$ ($j \in \mathbb{Z}$) und $c_j = \langle\varphi_j, f\rangle$ der j-te Fourierkoeffizient von f. Dann gilt $f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} c_j\varphi_j$ und $\int_0^1 |f|^2\mathrm{d}x = \sum_{j\in\mathbb{Z}}|c_j|^2$.*

Für allgemeine Perioden L ist $c_j = \frac{\langle\varphi_j,f\rangle}{\|\varphi_j\|}$ und die Parseval-Identität $\frac{1}{L}\int_0^L |f|^2\mathrm{d}x = \sum_{j\in\mathbb{Z}}|c_j|^2$. Für $\varphi_j(x) = \exp(\frac{2\pi ij}{L}x)$ ist $c_j = f_j$ der j-te Fourierkoeffizient.

3.4 Hermite-Polynome und harmonischer Oszillator

Definition 4.1 (Hermite-Polynom) $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{\partial^n}{\partial x^n}e^{-x^2}$ *für* $n = 0,1,2,\ldots$. *Die **Vernichtungs-** und **Erzeugungsoperatoren** sind definiert als $A = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + \frac{\partial}{\partial x})$ und $A^* \frac{1}{\sqrt{2}}(x - \frac{\partial}{\partial x})$.*

Lemma 4.2 *Sei $\varphi_n = 2^{-n/2}H_n(x)e^{-x^2/2}$. Dann gilt*

(i) $\varphi,\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}) \implies \langle A^*\varphi,\psi\rangle = \langle\varphi, A\psi\rangle$,

(ii) $AA^* - A^*A = 1$ *(iii)* $A\phi_0 = 0$ *(iv)* $A^*\phi_n = \phi_{n+1}$.

Satz 4.1 (H_n-Basis) $\Psi_n(x) = \pi^{-1/4}2^{-n/2}(n!)^{-1/2}H_n(x)e^{-x^2/2}$, $n = 0,1,2,\ldots$, *bilden ein vollständiges orthonormiertes System in $L^2(\mathbb{R})$.*

Der Hermitesche-Operator ist $H = A^*A + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}x^2$. Die zeitunabhängige Schrödingergleichung $H\psi_n = E_n\psi_n$ wird mit Ψ_n wie oben zum Eigenwert $E_n = n + \frac{1}{2}$ gelöst.

Korollar 4.3 ($\mathscr{S}$ dicht in L^2) *$\mathscr{S}(\mathbb{R})$ ist dicht in $L^2(\mathbb{R})$, d.h. zu jedem $\varepsilon > 0$ und $f \in L^2(\mathbb{R})$ existiert ein $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ mit $\|f - \varphi\|_2 < \varepsilon$.*

3.5 Orthogonale Polynome, Legendre Polynome

Sei $E \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $\rho : E \to \mathbb{R}$, sodass $\rho(x) \geq 0$ für fast alle $x \in E$ und $\int_E |x|^n\rho(x)\mathrm{d}x < \infty$ für alle $n = 0,1,2,\ldots$. Dann definiert $\langle f,g\rangle = \int_E \overline{f}(x)g(x)\rho(x)\mathrm{d}x$, $f,g \in \mathbb{C}[x]$ ein Skalarprodukt auf dem VR $\mathbb{C}[x]$ der Polynome in einer Variable mit komplexen Koeffizienten. Zum Paar (E,ρ) gehört eine Familie eindeutiger orthogon. Polynome.

Definition 5.1 (Legendre Polynom) $P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{\partial^l}{\partial x^l}(x^2-1)^l$, $l \in \mathbb{N}_0$.

Lemma 5.1 *P_l hat Grad l, $\int_{-1}^1 P_l(x)P_{l'}(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{2l+1}\delta_{ll'}$ und $P_l(1) = 1$.*

Lemma *Der Differentialoperator L mit $u \mapsto L = \frac{\partial}{\partial x}\left((x^2-1)\frac{\partial}{\partial x}\right)u$ ist ein Hermitescher Operator, d.h. $\langle Lu,v\rangle = \langle u,Lv\rangle$.*

Satz 5.2 *Die Legendre Polynome P_l sind Eigenvektoren von L zu den Eigenwerten $l(l+1)$, d.h. sie erfüllen die (spezielle) Legendre-DGl $\frac{\partial}{\partial x}\left((x^2-1)\frac{\partial}{\partial x}\right)P_l(x) = l(l+1)P_l(x)$. Die orthonormierten Polynome $\sqrt{\frac{2l+1}{2}}P_l$ bilden ein vollständiges orthonormiertes System in $L^2([-1,1])$.*

$\left(\sqrt{\frac{2l+1}{2}}P_l\right)_{l=0}^N$ ist eine vollständige orthonormierte Basis für den Vektorraum der Polynome vom Grad $\leq N$. Nach 2.3 ist $P = \sum_{l=0}^N \frac{2l+1}{2}\langle P_l, u\rangle P_l(x)$ die beste Approximation von u in $L^2([-1,1])$.

Hermite-Polynome H_n $H_{n+2}(x) - 2xH_{n+1}(x) + 2(n+1)H_n(x) = 0$, $H_n'(x) - 2nH_{n-1}(x) = 0$, $H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Legendre-Polynome P_l $\sum_{l=0}^\infty P_l(t)z^l = (1-2tz+z^2)^{-1/2}$ *für* $t \in [-1,1]$, $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$, $\frac{1}{|x-y|} = \sum_{l=0}^\infty \frac{|x|^l}{|y|^{l+1}} P_l\left(\frac{x\cdot y}{|x||y|}\right)$ *für* $x, y \in \mathbb{R}^3$, $|x| < |y|$, $P_l(\cos\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(i\sin\theta\cos\varphi + \cos\theta)^l \mathrm{d}\varphi$. *$P_{2l}$ sind gerade, P_{2l+1} ungerade.*

Laguerre-Polynome L_n $L_n = \frac{e^x}{n!}\partial_x^n(e^{-x}x^n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{k!}x^k$

Tschebychev-Polynome T_l $T_{l+1}(x) = 2xT_l(x) - T_{l-1}(x)$, $T_1(x) = x$, $l \in \mathbb{N}$, $T_0(x) = 1$, *T_l Grad l und Leitkoeffizient 2^{l-1}*, $T_l(\cos\theta) = \cos(l\theta)$.

Polynom		E, ρ	Leitk	Differentialgleichung
Hermite	H_n	$\mathbb{R}$	2^n	$y'' - xy' = 2ny$
		e^{-x^2}		$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{\partial^n}{\partial x^n}e^{-x^2}$
Legendre	P_l	$[-1,1]$		$\left((x^2-1)y'\right)' = l(l+1)y$
		1		$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{\partial^l}{\partial x^l}(x^2-1)^l$
	$P_{l,m}$	$[-1,1]$		$\left((x^2-1)y'\right)' = (l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2})y$
		1		$(1-x^2)^{m/2}\partial_x^m P_l(x) = \frac{(1-x^2)^{m/2}}{2^l l!}\partial_x^{l+m}(x^2-1)^l$
Laguerre	L_n	$[0,\infty)$		$xy'' + (1-x)y' + ny = 0$
		e^{-x}		$L_n = \frac{e^x}{n!}\partial_x^n(e^{-x}x^n) = \sum_{k=0}^n\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{k!}x^k$
Bessel	J_α			$y'' + \frac{1}{x}y' + (1-\frac{\alpha^2}{x^2})y = 0$
				$J_\alpha(z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(j+\alpha+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\alpha+2k}$
Chebychev	T_l	$[-1,1]$	2^{l-1}	
		$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		
Jacobi		$[-1,1]$		
		$\frac{(1-x)^a}{(1-x)^{-b}}$		

3.6 Kugelfunktionen

Der Laplace-Operator in 3D lautet $\triangle = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\triangle_{S^2}$, wobei $\triangle_{S^2}u = \frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \cot\theta\frac{\partial u}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}$. Der Gradient in Kugelkoordinaten ist grad $= \partial_r\hat{e}_r + \frac{1}{r}\partial_\theta\hat{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\varphi\hat{e}_\varphi$

Definition (Kugelfunktion) *ist eine auf der Einheitssphäre definierte glatte Funktion $Y(\theta,\varphi)$, welche ein Eigenvektor zum Laplace Operator $\triangle_{S^2}$ ist, d.h. $\triangle_{S^2}Y = -\lambda Y$.*

Lösungen der Form $\triangle u(x) = 0$ für $|x| \leq R$ und $u(x) = f(x)$ für $|x| = R$ können durch die Separation $u(x) = U(r)Y(\theta,\varphi)$ und $Y(\theta,\varphi) = P(\cos\theta)V(\varphi)$ mit $U(r) = ar^l$ und $V(\varphi) = e^{\pm im\varphi}$ gelöst werden. Die DGL für P führt auf die zugeordneten Legendre-Polynome. Dann sind $P_{l,m}(\cos\theta)e^{\pm im\varphi}$ mit $l = 0,1,\ldots$, $m = 0,\ldots,l$ Eigenvektoren von $\triangle_{S^2}$ zum Eigenwert $-l(l+1)$.

Definition *Die **zugeordneten** (oder **assozierten**) **Legendre-Funktionen** sind* $P_{l,m}(x) = (1-x^2)^{m/2}\partial_x^m P_l(x) = \frac{(1-x^2)^{m/2}}{2^l l!}\partial_x^{l+m}(x^2-1)^l$.

Satz 7.1 *(i) (**Legendresche DGL**) Die zugeordneten Legendre-Funktionen $P_{l,m}$ erfüllen* $\frac{\partial}{\partial x}\left((1-x^2)\frac{\partial}{\partial x}P_{l,m}(x)\right) + \left(l(l+1) + \frac{m^2}{1-x^2}\right)P_{l,m}(x) = 0.$

*(ii) (**Orthogonalität**) Für alle $m = 0,1,2,\ldots,m \leq l, l' \in \mathbb{Z}$ gilt* $\int_{-1}^1 P_{l,m}(x)P_{l',m}(x)\mathrm{d}x = \frac{(l+m)!}{(l-m)!}\frac{2}{2l+1}\delta_{l,l'}$.

*(iii) (**Basis**) $\left((1-x^2)^{-m/2}P_{l,m}\right)_{l=m,m+1,\ldots,m+N}$ ist für alle $m, N \in \{0,1,2,\ldots\}$ eine Basis des Raums der Polynome vom Grad $\leq N$.*

Satz 7.2 (Kugelfunktionen) *Die Kugelfunktionen $Y_{l,m}(\theta,\varphi) = c_{l,m}P_{l,|m|}(\cos\theta)e^{im\varphi}$ mit $l = 0,1,2\ldots$, $m = -l,\ldots,l-1,l$, wobei $c_{l,m} = \frac{(-1)^m}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{2l+1}{2}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}$ für $m \geq 0$, $c_{l,-m} = (-1)^m c_{l,m}$ bilden eine orthonormierte Basis des Hilbertraums $L^2(S^2)$, die aus EV von $\triangle_{S^2}$ besteht. Es gilt $(Y_{l,m}, Y_{l',m'}) = \delta_{l,l'}\delta_{m,m'}$*

Laplace *Gegeben eine Laplacegleichung und Hinweise auf Kugelfunktionen, mache den Ansatz $u(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^\infty\sum_{m=-l}^l(a_{l,m}r^l + b_{l,m}r^{-l-1})Y_{l,m}(\theta,\varphi)$ bzw. $u(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^\infty\sum_{m=-l}^l a_{l,m}r^lY(\theta,\varphi)$, schreibe die Randbedingungen als Linearkombination der Kugelfunktionen und erhalte $a_{k,m}, b_{k,m}$ durch das Skalarprodukt von v und $Y_{k,m}$.*

Für $u(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^N\sum_{m=-l}^l a_{l,m}r^lY(\theta,\varphi)$ gilt: $\triangle u = 0$; $\int_{\mathbb{R}^3}|u(x)|^2\mathrm{d}x = \sum_{l=0}^N\sum_{m=-l}^l|a_{l,m}|^2$; $a_{l,m} = \int_0^{2\pi}\int_0^\pi \overline{Y_{l,m}(\theta,\varphi)}u(1,\theta,\varphi)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$; wenn $a_{l,m} = 0$ für $m \neq 0$, dann ist u invariant unter Rotationen um die z-Achse.

3.7 Schwingungen einer kreisförmigen Membran

Das Problem $\frac{1}{c^2}\partial_t^2 v(t,x) - \triangle v(t,x) = 0$ für $|x| < R$ und $v(t,x) = 0$ für $|x| = R$ wird mit $v(t,x) = e^{i\omega t}u(x)$ reduziert auf $\triangle u = -\frac{\omega^2}{c^2}u$ für $|x| < R$ und $u(x) = 0$ für $|x| = R$. In Polarkoordinaten $(\partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2)u(r,\varphi) = -\frac{\omega^2}{c^2}u(r,\varphi)$ für $r < R$. Reelle Lösungen sind von der Form $u - J_m(\omega r/c)(A\cos(m\varphi) + B\sin(m\varphi)) = u - J_m(\omega r/c)A\cos(m(\varphi - \varphi_0))$, wobei $J_m(\omega R/c) = 0$.

4 Distributionen

4.1 Temperierte Distributionen

Definition 2.1 (Temperierte Distribution) *ist eine stetige lineare Abbildung $\omega : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$, $\varphi \mapsto \omega[\varphi]$. Mit anderen Worten erfüllt ω die Eigenschaften $\omega[\lambda\varphi + \mu\psi] = \lambda\omega[\varphi] + \mu\omega[\psi]$ für $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ und $\varphi_n \xrightarrow{\mathscr{S}} \varphi \implies \omega[\varphi_n] \to \omega[\varphi]$ bzw. $\varphi_n \xrightarrow{\mathscr{S}} 0 \implies \omega[\varphi_n] \to 0$. Der Raum der temperierten Distributionen wird mit $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ bezeichnet und ist der topologische Dualraum zu $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.*

Für $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ aufgefasst als Unterraum von $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ definieren wir für $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ eine Distribution ω_f durch $f[\varphi] = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$ (reguläre Distributionen). Schwächer reicht $f(x)(1+|x|^2)^{-N} \in L^1$ für ein hinreichend grosses N.

Definition (Delta-Funktion) $\delta[\varphi] = \varphi(0)$, $\delta_a[\varphi] = (T_a\delta)[\varphi] = \varphi(a)$.

4.2 Operationen auf Distributionen

Seien $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ und $\omega \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ die Distribution von f. Die folgenden Operationen sind stetige lineare Abbildungen.

Definition (Translation) $(T_a\omega)[\varphi] = \omega[T_{-a}\varphi]$, *wob.* $(T_af)(x) = f(x-a)$, $a \in \mathbb{R}^n$.

Definition 3.1 (Lineare Koordinatentransf.) $U_A\omega[\varphi] = |\det A|\omega[U_{A^{-1}}\varphi]$, *wobei* $(U_Af)(x) = f(A^{-1}x)$, $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Definition 3.2 (Funktion-Multiplikation) $(g\omega)[\varphi] = \omega[g\varphi]$.

Definition 3.3 (Ableitung) $(\partial^\alpha\omega)[\varphi] = (-1)^{|\alpha|}\omega[\partial^\alpha\varphi]$.

Definition 3.4 (FT) $\hat{\omega}[\varphi] = \omega[\hat{\varphi}]$, $\check{\omega}[\varphi] = \omega[\check{\varphi}]$ *für alle* $\omega \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Definition (Faltung) *Für $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, $\omega \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ definieren wir $(g*\omega)[\varphi] = \omega[\tilde{g}*\varphi]$ und analog $(\omega*g)[\varphi] = \omega[\tilde{g}*\varphi]$, wobei $\tilde{g}(x) = g(-x)$.*

Definition (Heaviside-Funktion) $\theta(x) = 1$ *für* $x \geq 0$ *und* $\theta(x) = 0$ *für* $x < 0$.

Lemma 3.1 (θ und δ) $\frac{\partial}{\partial x}\theta = \delta$, *wobei* $\delta[\varphi] = \varphi(0)$.

Lemma 3.2 $U_A\delta = |\det A|\delta$ *für* $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $(\delta(A^{-1}x) = |\det A|\delta(x))$

Satz 3.3 *Die FT und die inverse FT sind bijektive lineare Abbildungen $^\wedge, ^\vee : \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ und für alle $\omega \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ gilt $\omega^{\wedge\vee} = \omega^{\vee\wedge} = \omega$.*

Lemma 3.4 (FT von 1, δ) $\hat{1} = (2\pi)^n\delta$ *und* $\hat{\delta} = 1$.

Lemma 3.5 (Faltung mit δ) *Für alle $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt $g * \delta = g$.*

Lemma 3.6 (Faltung und Ableitung) *Seien $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, $\omega \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt für alle $\alpha \in \mathbb{N}^n$*

(i) $\partial^\alpha(f*g) = (\partial^\alpha f)*g = f*\partial^\alpha g$,

(ii) $\partial^\alpha(\omega*g) = (\partial^\alpha\omega)*g = \omega*\partial^\alpha g = \partial^\alpha(g*\omega)$.

4.3 Rechnungen

Reihenfolge $x^2\delta'(3x)[\varphi] = (U_{1/3}\delta')\left[x^2\varphi(x)\right] = \delta[\partial_x U_{1/3}(x^2\varphi(x))]$.

$\widehat{\sin}(k) = \frac{\pi}{i}(\delta(k-1) - \delta(k+1))$, $\qquad \widehat{\cos}(k) = \frac{1}{2}(\delta(k-1) + \delta(k+1))$

$x\delta = x\delta[\varphi] = \delta[x\varphi] = 0$, $\qquad \widehat{e^{iax}}[\varphi] = \int\hat{\varphi}e^{iax}\mathrm{d}x = 2\pi\check{\hat{\varphi}}(a) = 2\pi\varphi(a) = 2\pi\delta_a[\varphi]$

$\hat{x}[\varphi] = \int x\hat{\varphi}(x)\mathrm{d}x = -i\int(\varphi')^\wedge(x)e^{i0x}\mathrm{d}x = -2\pi i(\varphi')^{\wedge\vee}(0) = -2\pi i\delta[\varphi'] = 2\pi i\delta'[\varphi]$

Ableitung Betragsfunktion $\partial_x|x| = \theta - U_{-1}\theta$, $\quad \partial_x^n|x| = 2\partial_x^{n-2}\delta$, $n \geq 2$

4.4 Konvergenz in $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$

Definition 4.1 (Konvergenz) *Eine Folge $(\omega_j)_{j=1}^\infty$ in $\mathscr{S}'$ konvergiert gegen $\omega \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, falls für alle $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt $\omega_j[\varphi] \to \omega[\varphi]$ für $j \to \infty$.*

Satz 4.1 (Folge gegen δ) *Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{d}x = 1$ und sei $f_j(x) = f(jx)j^n$ für $j = 1,2,3,\ldots$. Dann konvergiert die Folge f_j (als Folge von Distributionen) gegen δ.*

$P(1/x)[\varphi] = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{1}{x}\varphi(x)\mathrm{d}x + \int_\varepsilon^{+\infty}\frac{1}{x}\varphi(x)\mathrm{d}x$ und $\frac{1}{x\pm i0}[\varphi] = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{x+i\varepsilon}\varphi(x)\mathrm{d}x$.

Satz 4.2 $\frac{1}{x\pm i0} = P(1/x) \mp i\pi\delta$ *ist eine temperierte Distribution.*

4.5 Fundamentallösungen für den Laplace-Operator

$$\triangle u(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \qquad \text{(Poisson-Gleichung)}$$

Gesucht ist $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ mit $u(x) \to 0$ für $|x| \to \infty$. Im Distributionensinne ist $(\triangle u)[\varphi] = u[\triangle\varphi] = f[\varphi]$.

Definition 5.1 (Fundamentallösung) *für einen Differentialoperator $L = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n, |\alpha|\leq N} a_\alpha\partial^\alpha$ mit konstanten Koeffizienten a_α ist eine Distribution $E \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, die die Gleichung $LE = \delta$ erfüllt. Eine Lösung des Problems $Lu(x) = f(x)$ ist dann gegeben durch $u = E*f$, weil $Lu = L(E*f) = (LE)*f = \delta*f = f$.*

Lemma 5.1 (Green'sche Identität) *Sei D ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{R}^n$ mit glattem Rand ∂D und nach aussen weisendem Einheitsvektoren $n(x)$, $x \in \partial D$. Für alle $u, v, \in C^2(D \cup \partial D)$ gilt dann $\int_D(\triangle uv - u\triangle v)\mathrm{d}x = \int_{\partial D}\left(\frac{\partial u}{\partial n}v - u\frac{\partial v}{\partial n}\right)\mathrm{d}\Omega(x)$, wobei $\frac{\partial}{\partial n} = \sum_{i=1}^n n_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$ die Ableitung in normaler Richtung bezeichnet und $\mathrm{d}\Omega(x)$ das Oberflächenmass auf ∂D ist.*

Satz 5.2 (Fundamentallösung für $\triangle$) *Sei $n \geq 2$. Die Funktion*

$$E(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2}(2-n)} |x|^{-n+2} = \frac{1}{|S^{n-1}|}\frac{|x|^{2-n}}{2-n}, & n \geq 3 \\ \frac{1}{2\pi}\ln|x|, & n = 2 \end{cases}$$

ist Fundamentallösung für den n-dimensionalen Laplace-Operator, d.h. sie erfüllt (als Distribution) die Gleichung $\triangle E = \delta$. Eine Lösung der Poisson-Gleichung ist gegeben durch $u = E * f$.

Beispiel 5.1 $n = 3$: $E(x) = -\frac{1}{4\pi|x|}$, $n = 4$: $E(x) = -\frac{1}{4\pi^2|x|^2}$.

Definition (Glatte Distributionen) *Eine Distribution $\omega \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ heisst **glatt** auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$, falls es eine glatte Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ gibt mit $\omega[\varphi] = \int f\varphi \mathrm{d}x$ für alle $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, die ausserhalb U verschwinden. δ und E sind glatt auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.*

Definition *Ein Differenzialoperator der Ordnung N heisst **elliptisch**, wenn $\sum_{|\alpha|=N} a_\alpha p^\alpha \neq 0$ für alle $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. $\triangle$ ist elliptisch, $\square$ nicht.*

Die elliptische Regularität besagt, dass jede Lösung $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ von $Lu = f$ für einen elliptischen Differentialoperator L und einer auf U glatten Funktion $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ ebenfalls glatt ist.

4.6 Fundamentallösungen und Fouriertransformationen

Die Fouriertransformierte von $LE(x) = \delta(x)$ ergibt $P(k)\hat{E}(k) = 1$, wobei $P(k) = \sum_\alpha a_\alpha(ik)^\alpha$ ein Polynom in $k_1, \ldots, k_n$ ist. Hat $P(k)$ keine reellen Nullstellen (bzw. integrierbare Singularitäten), definiert $1/P(k)$ eine Distribution und $E = (1/P(k))^\vee$ Lösung des Problems. $P(k) = |k|^2$ für $L = -\triangle$.

Beispiel (Fundamentallösung) *Für Distribution $E[\varphi(x_1,x_2)] = \int_0^\infty \varphi(t,t)e^{-t}\mathrm{d}t$ und Operator $L = \partial_{x_1} + \partial_{x_2} + 1$ ist $\widehat{LE}[\varphi(x_1,x_2)] = (\partial_{x_1} + \partial_{x_2} + 1)E[\hat{\varphi}(k_1,k_2)] = E[(-\partial_{k_1} - \partial_{k_2} + 1)\int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x_1,x_2)e^{-ik_1x_1-ik_2x_2}\mathrm{d}x] = E[\int_{\mathbb{R}^2}(-\partial_{k_1} - \partial_{k_2} + 1)\varphi(x_1,x_2)e^{-ik_1x_1-ik_2x_2}\mathrm{d}x] = E[\int_{\mathbb{R}^2}(ix_1 + ix_2 + 1)\varphi(x_1,x_2)e^{-ik_1x_1-ik_2x_2}\mathrm{d}x] = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2}(ix_1 + ix_2 + 1)\varphi(x_1,x_2)e^{-t(ix_1+ix_2+1)}\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}^2}\varphi(x_1,x_2)\int_0^\infty(ix_1 + ix_2 + 1)e^{-t(ix_1+ix_2+1)}\mathrm{d}t\mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}^2}\varphi(x_1,x_2)[e^{-t(ix_1+ix_2+1)}]|_0^\infty\mathrm{d}x = 1[\varphi(x_1,x_2)]$.*

4.7 Retardierte Fundamentallösung für den d'Alembert-Operator

Lösungen zur inhomogenen Wellengleichung $\frac{1}{c^2}\partial_t^2 u - \triangle u = f$ führen auf den d'Alembert-Operator $L = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ mit $x_0 = ct$, also $(-k_0^2 + |\mathbf{k}|^2)\hat{E}(k) = 1$. Eine Lösung ist $u(x_0, \mathbf{x}) = (E * f)(x_0, \mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} f(x_0 - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, \mathbf{x}')\mathrm{d}\mathbf{x}'$.

5 Dirichletproblem

5.1 Dirichlet und Neumannrandbedingungen

Definition *Für $u \in C^2(D)$, $D \subset \mathbb{R}^n$ lautet die **Laplace-Gleichung** $\triangle u(x) = 0$, $x \in D$, Lösungen heissen **harmonische Funktionen**. Ist D ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{R}^n$ mit glattem Rand ∂D. Typische Randwertprobleme sind*

*(i) **Dirichletproblem (D)***

$$\begin{cases} \triangle u(x) = 0 & x \in D \\ u(x) = f(x) & x \in \partial D \end{cases},$$

*(ii) **Neumannproblem (N)***

$$\begin{cases} \triangle u(x) = 0 & x \in D \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x) = g(x) & x \in \partial D \end{cases}.$$

Satz 1.1 (Eindeutigkeit) *Seien u_1, u_2 zwei Lösungen von (D). Dann ist $u_1 = u_2$. Seien u_1, u_2 zwei Lösungen von (N). Dann ist $u_1 = u_2 +$ const.*

5.2 Greensche Funktionen

Lemma 2.1 *Sei $u \in C^2(\overline{D})$. Dann gilt für $x \in D$ $u(x) = \int_D E(x-y)\triangle u(y)\mathrm{d}y = \int_{\partial D}\left(E(x-y)\frac{\partial u}{\partial n_y} - u(y)\frac{\partial}{\partial n_y}E(x-y)\right)\mathrm{d}\Omega(y)$.*

Definition 2.1 (Greensche-Funktion) *Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen mit glattem Rand. Eine stetige Funktion $G(x,y)$ auf $\{(x,y) \in \overline{D} \times D : x \neq y\}$ heisst **Greensche Funktion** des Gebiets D (für den Laplace-Operator), falls*

(i) $G(x,y) = E(x-y) + v(x,y)$, $v \in C^2(\overline{D} \times D)$ und $\triangle_x v(x,y) = 0$,

(ii) $G(x,y) = 0$, $x \in \partial D$, $y \in D$.

Insbesondere ist für $x \neq y$ $\triangle_x G(x,y) = 0$. Wir schreiben $\triangle_x$ für den Laplace-Operator $\sum \partial^2/\partial x_i^2$ in den Variablen x.

Satz 2.2 (Form der Lösung) *Falls u eine Lösung von (D) ist, hat man $u(x) = \int_{\partial D}\frac{\partial G}{\partial n_y}(y,x)f(y)\mathrm{d}\Omega(y)$ für alle $x \in D$.*

5.3 Methode der Spiegelbildladung, Poissonformel

Eine **Spiegelung** um die Sphäre vom Radius R ist die Abbildung $y \mapsto y^* = \frac{R^2}{|y^2|}y$. Sie erfüllt $y^{**} = y$, $|y^*| = \frac{R^2}{|y|}$ und $|y||x - y^*| = |x||y - x^*|$.

Greensche Funktionen *sind gegeben durch*

$$G(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{|S^{n-1}|(2-n)}\left(|x-y|^{2-n} - \left(\frac{|y|}{R}\right)^{2-n}|x - y^*|^{2-n}\right) & n \geq 3, \\ \frac{1}{2\pi}(\log|x-y| - \log(|x-y^*|\frac{|y|}{R})) & n = 2. \end{cases}$$

Definition *Der **Poisson-Kern** ist definiert durch $H(y,x) = \frac{\partial}{\partial n_y}G(y,x) = \langle\nabla_y G(y,x), n(y)\rangle = \frac{1}{|S^{n-1}|R}\frac{R^2-|x|^2}{|x-y|^n}$ für $x, y \in \mathbb{R}^n$, $|y| = R$, $n = 2, 3, \ldots$.*

Satz 3.1 (Poisson Formel, Lösung) *Sei D die Kugel $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| < \mathbb{R}\}$, f stetig auf ∂D.*

$$u(x) = \int_{|y|=R} f(y)H(y,x)\mathrm{d}\Omega(y) = \frac{R^2 - |x|^2}{|S^{n-1}|R}\int_{|y|=R}\frac{f(y)}{|x-y|^n}\mathrm{d}\Omega(y), \quad x \in D$$

ist glatt auf $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$, harmonisch und konvergiert gegen f, wenn $|x| \to R$.

Satz 3.2 (Mittelwertprinzip) *Sei u harmonisch auf einer offenen Menge $D \subset \mathbb{R}^n$. Für jede Kugel $B_R(x) \subset D$ gilt $u(x) = \frac{1}{|S_R(x)|}\int_{S_R(x)} u(y)\mathrm{d}\Omega(y)$.*

Satz 3.3 (Maximum-Prinzip) *Ist u harmonisch auf einem Gebiet D und sei $x_0 \in D$ eine Maximalstelle, d.h. $u(x) \leq u(x_0)$ für alle $x \in D$. Dann ist u konstant.*

Satz 3.4 *Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und u eine stetige Funktion auf dem Abschluss $\overline{D}$, die harmonisch auf D, sodass $u(x) = 0$ auf dem Rand ∂D. Dann ist $u(x) = 0$ für alle $x \in \overline{D}$.*

Satz 3.5 *Sei u harmonisch in $B_R(x)$. Dann ist $|\partial_{x_i}u(x)| \leq \frac{n}{R}\max_{|y-x|=R}|u(y)|$.*

Korollar 3.6 *Jede auf ganz $\mathbb{R}^n$ beschränkte harmonische Funktion ist konstant.*

6 Beweisideen

6.1 Fourierreihen

Satz 1.2 *$|f_n e^{\frac{2\pi i n}{L}x}| = |f_n| \Rightarrow$ absolute Konvergenz, $|f(x) - \sum_{|n|\leq N} f_n e^{\frac{2\pi i n}{L}x}| \leq \sum_{|n|\geq N}|f_n| \Rightarrow$ glm. Konv (nicht abh. von x), glm. Konvergenz stetiger Funktionen $\Rightarrow$ f ist stetig. Periodizität einfach durch Einsetzen in die Reihendarstellung. Wir setzen die Reihendarstellung von f in die Formel des Koeffizienten ein, tauschen Reihe und Integral (wegen glm. Konv.) und erhalten mit L1.1 genau den Fourierkoeffizienten.*

Satz 2.1 *Mit Verschiebung der Integrationsgrenzen und Variablensubst. erhalte $f_n = -\frac{1}{L}\int_0^L e^{\frac{-2\pi i n}{L}x}f(x + \frac{L}{2n})\mathrm{d}x$. Schreibe $f_n = \frac{1}{2}(f_n + f_n)$ mit der normalen und der verschobenen Darst. f ist stetig auf einem ausreichend großen kompakten Intervall $\Rightarrow$ glm. st. Also wird $\forall x \in [0,L] \forall \varepsilon : |f(x) - f(x + \frac{L}{2n})| < \varepsilon$ und somit $|f_n| < \frac{\varepsilon}{2}$.*

A Lebesgue-Integrationstheorie

A.1 Das Lebesguesche Integral

Lemma 2.5 *Sei $f : E \to \mathbb{C}$ messbar. Dann ist $|f|$ messbar und f ist genau dann integrierbar, falls $|f|$ integrierbar ist, d.h. wenn $\int_E |f(x)|\mathrm{d}x < \infty$.*

Satz 2.6 *Seien f, g integrierbar, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Dann gilt*

(i) $\alpha f + \beta g$ ist integrierbar und $\int_E \alpha f(x) + \beta g(x)\mathrm{d}x = \alpha\int_E f(x)\mathrm{d}x + \beta\int_E g(x)\mathrm{d}x$,

(ii) $f \leq g \implies \int_E f(x)\mathrm{d}x \leq \int_E g(x)\mathrm{d}x$,

(iii) $f(x) = g(x)$ f.ü. $\implies \int_E f(x)\mathrm{d}x = \int_E g(x)\mathrm{d}x$,

(iv) $\int_E |f(x)|\mathrm{d}x = 0 \iff f(x) = 0$ f.ü.,

(v) $|\int_E f(x)\mathrm{d}x| \leq \int_E |f(x)|\mathrm{d}x$,

(vi) ist $F \subset E$ messbar, so ist die Einschränkung von f auf F ebenfalls integrierbar und es gilt $\int_E f(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\chi_F(x)\mathrm{d}x$,

(vii) ist f Riemann-integrierbar auf $[a,b] \implies$ f Lebesgue-integrierbar und das Lebesguesche Integral stimmt mit dem Riemannschen überein,

(viii) für alle affinen Transformationen $x \mapsto Ax + b$ von $\mathbb{R}^n$ ist $x \mapsto f(Ax + b)$ integrierbar und es gilt $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{d}x = |\det A|\int_{\mathbb{R}^n} f(Ax + b)\mathrm{d}x$.

A.2 Konvergenzsätze

Satz 3.1 (MCT) *Sei f_i eine Folge integrierbarer Funktionen $0 \leq f_i(x) \leq f_{i+1}(x) \to f(x)$ für $i \to \infty$ $\forall x \in E$. Ist die Folge $\int_E f_i(x)\mathrm{d}x$ beschränkt, so ist f integrierbar und es gilt $\lim_{i\to\infty}\int_E f_i(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x$.*

Satz 3.2 (DCT) *Sei f_i eine Folge integrierbarer Funktionen mit $\lim_{i\to\infty} f_i(x) = f$ und es existiert eine integrierbarer Funktion g mit $|f_i(x)| \leq g(x)$ $\forall i, x$. Dann ist f integrierbar und es gilt $\lim_{i\to\infty}\int_E f_i(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x$*

A.3 Der Satz von Fubini

Satz 4.1 (Fubini) *Seien $E \subset \mathbb{R}^n$ und $F \subset \mathbb{R}^m$ feste messbare Mengen. Sei $f : E \times F \to \mathbb{C}$ messbar. Ist $f(x,\cdot)$ für alle $x \in E$ (bzw. $f(\cdot,y)$ für alle $y \in F$) integrierbar, so ist die Funktion $y \mapsto \int_E f(x,y)\mathrm{d}x$ (bzw. $x \mapsto \int_F f(x,y)\mathrm{d}y$) messbar. Existiert eins der Integrale $\int_{E\times F}|f(x)|\mathrm{d}x$, $\int_F\left(\int_E |f(x,y)|\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$ oder $\int_E\left(\int_F |f(x,y)|\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$, so existieren sie alle drei und es gilt $\int_{E\times F} f(x)\mathrm{d}x = \int_F\left(\int_E f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_E\left(\int_F f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$.*

A.4 L^p-Räume

Lemma 5.1 *$L^p(E)$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{C}$.*

Satz 5.2 *$L^p(E)$ mit Norm $\|f\|_p = \left(\int_E |f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$ ist ein normierter VR.*

Definition 5.3 *Eine $(f_i)_{i=1}^\infty$ in einem normierten Vektorraum V konvergiert gegen $f \in V$, falls $\lim_{i\in\infty}\|f_i - f\| = 0$. Eine Folge heisst **Cauchy-Folge**, falls $\forall\varepsilon > 0$ $\exists N > 0$ mit $\|f_i - f_j\| < \varepsilon$ für alle $i, j > N$. Ein normierter Vektorraum V heisst **Banachraum**, falls alle Cauchy-Folgen in V konvergieren.*

Satz 5.3 (Riesz-Fisher) *Für alle $p \geq 1$ ist $L^p(E)$ ein Banachraum.*

Definition 5.4 (Träger) *von $f : E \to \mathbb{C}$ ist $\mathrm{supp}f = \overline{\{x \in E : f(x) \neq 0\}}$.*

Satz 5.4 (C_0 dicht in L^p) *Stetige Funktionen mit kompaktem Träger sind dicht in $L^p(E)$, d.h. $\forall f \in L^p(E)$ $\forall\varepsilon > 0$ $\exists g \in C_0(E)$ mit $\|f - g\|_p < \varepsilon$.*

B Misc

B.1 Konvergenz, Mittelwertsatz

Definition (Konvergenz) *Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $(f_n)_n$ eine Funktionenfolge mit $f_n : D \to \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Falls*

- *$\forall x \in D$ $lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ ist f_n punktweise konvergent,*
- *$lim_{n\to\infty} \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| = 0$ ist f_n gleichmässig konvergent.*

Anders ausgedrückt gilt $(f_n)_n$ gleichmässig konvergent $\Leftrightarrow \forall \varepsilon \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : (n \geq N \implies (\forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon))$.

Satz *Falls $(f_n)_n$ eine Folge stetiger Funktionen gleichmässig gegen f konvergiert, dann ist f stetig.*

Satz (Mittelwertsatz) *Sei $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diffb. Falls $x_0 + th \in U$ $\forall t \in [0,1]$ und ein $h \in \mathbb{R}^n$, dann existiert ein $t_\xi \in (0,1)$, sodass $f(x_0+h) - f(x_0) = \partial_h f(x_0 + t_\xi h)$. Für $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, diffbar auf (a,b), existiert ein $\xi \in (a,b)$, sodass $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*

B.2 Vertauschungssätze

Es wird vorrausgesetzt, dass alle Grenzwerte und Ableitungen existieren, Funktionen integrierbar sind und die zu integrierende Gebiet schön sind.

$\sum_n \lvert\partial_x f_n(x)\rvert < \infty$	$\Rightarrow$	$\partial_x \sum_n f_n(x) = \sum_n \partial_x f_n(x)$
$\lim_{n\to\infty} f_n = f$ glm.	$\Rightarrow$	$\int \sum_n f_n(x) = \sum_n \int f_n(x)$
$\lim_{n\to\infty} f_n = f$ glm.	$\Rightarrow$	$\lim_{n\to\infty} \int f_n(x)\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x$
$\partial_t f(x,t)$ glm. stetig	$\Rightarrow$	$\partial_t \int_a^b f(x,t)\mathrm{d}x = \int_a^b \partial_t f(x,t)\mathrm{d}x$
$0 \leq f_n \leq f_{n+1}, \int f_n(x)\mathrm{d}x \leq c$	$\Rightarrow$	$\lim_{n\to\infty} \int f_n(x)\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x$
$\exists g \in L^1 :\ \lvert f_n(t,x)\rvert < g(x)$	$\Rightarrow$	$\lim_{n\to\infty} \int f_n(x)\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x$
$\exists g \in L^1 :\ \lvert\partial_t f(t,x)\rvert < g(x)$	$\Rightarrow$	$\partial_t \int f(t,x)\mathrm{d}x = \int \partial_t f(t,x)\mathrm{d}x$
$f \in C_0, \mathscr{S}$	$\Rightarrow$	$\partial_t \int f(t,x)\mathrm{d}x = \int \partial_t f(t,x)\mathrm{d}x$
$\int_F \left(\int_E \lvert f(x,y)\rvert\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y < \infty$	$\Rightarrow$	$\int_F \left(\int_E f\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_E \left(\int_F f\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$

B.3 Trigonometrie

$$\sin(ax) = \left.\begin{cases} |\cdot|\max & ax = (2n+1)\frac{\pi}{2} \qquad\qquad 0 \\ 0 & ax = (2n+0)\frac{\pi}{2} = n\pi \quad |\cdot|\max \end{cases}\right\} = \cos(ax)$$

$\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$, $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, $\quad \sinh x = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$, $\cosh x = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$

$A\cos x + B\sin x = \frac{A-iB}{2}e^{ix} + \frac{A+iB}{2}e^{-ix}$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \sin x + \cos x = \frac{1}{1+i}e^{ix} + \frac{1}{1-i}e^{-ix} \qquad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

$\sin(x\pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y), \quad \sin 2x = 2\sin x\cos x$

$\cos(x\pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y), \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\sin x\sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y)), \qquad \sin^2(x) = \frac{1}{2}(1-\cos(2x))$

$\cos x\cos y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y)), \qquad \cos^2(x) = \frac{1}{2}(1+\cos(2x))$

$\sin x\cos y = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y)), \qquad \sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin(2x)$

$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad \tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\tan y}, \qquad \langle x,y\rangle = \cos(\gamma)|x||y|$

B.4 Ungleichungen, Abschätzungen und other

$|\langle u,v\rangle| \leq \|u\|\|v\|, \qquad 2|ab| \leq |a|^2 + |b|^2, \qquad ||x|-|y|| \leq |x\pm y| \leq |x| + |y|$

$|\int_E f(x)\mathrm{d}x| \leq \int_E |f(x)|\mathrm{d}x, \quad (1+x)^n \geq 1 + nx,\ x \geq -1,\ n \in \mathbb{N}$

Faktorisierung $ax^2 + bx = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a}$

$\mathscr{S}$, $\mathbb{C}_0^0$ (und somit auch C_0, C^∞, C^n $\forall n$, C^0) sind dicht in L^p.

B.5 Integrale und Reihen

$$\sum_{k=0}^n q^k = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & q \neq 1 \\ n+1 & q = 1 \end{cases}, \quad \sum_{k=0}^\infty q^k = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & |q| < 1 \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}, \quad \prod_{k=0}^n (2k+1) = \frac{(2k)!}{2^k k!}$$

$e^x = \sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{n!}, \quad \log(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n, \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^\infty x^n\ |x| < 1$

$\sin x = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{6} + \ldots \quad \cos x = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2} + \ldots$

$$\int \sin(nx)\cos(mx)\mathrm{d}x = \begin{cases} -\dfrac{\cos((n+m)x)}{2(n+m)} - \dfrac{\cos((n-m)x)}{2(n-m)} + C & n \neq \pm m \\ -\dfrac{1}{4n}\cos(2nx) + C & n = m \end{cases}$$

$$\int \sin(nx)\sin(mx)\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{\sin((n-m)x)}{2(n-m)} - \dfrac{\sin((n+m)x)}{2(n+m)} + C & n \neq \pm m \\ \pm\frac{x}{2} \mp \frac{1}{3n}\sin(2nx) + C & n = \pm m \end{cases}$$

$$\int \cos(nx)\cos(mx)\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{\sin((n+m)x)}{2(n+m)} + \dfrac{\sin((n-m)x)}{2(n-m)} + C & n \neq \pm m \\ \frac{x}{2} + \frac{1}{4n}\sin(2nx) + C & n = \pm m \end{cases}$$

$\int_a^{a+2\pi l/n} \sin(nx)\mathrm{d}x = \int_a^{a+(2l+1)\pi/n} \cos(nx)\mathrm{d}x = 0,\ a \in \mathbb{R},\ l \in \mathbb{N}$

$\int_0^{l\pi} \sin(nx)\cos(mx)\mathrm{d}x = C\delta_{nm},\ l \in \mathbb{N}$

$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cos(mx)\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \sin(nx)\cos(mx)\mathrm{d}x = 0$

$\int_\mathbb{R} e^{-x^2/a}\mathrm{d}x = \sqrt{a\pi} \quad \int_0^\infty e^{-x^2/a}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{a\pi}$

B.6 Koordinatensysteme

Polarkoordinaten $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi = \arctan(y/x)$ *für* $x > 0$, $0 \leq r \leq \infty$, $0 \leq \varphi < 2\pi$. $\triangle = \partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2$.

Kugelkoordinaten $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$
$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\theta = \arccos\left(\frac{z}{r}\right)$, $\varphi = \arg(x,y)$, $0 \leq r \leq \infty$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$.
$\mathrm{d}V = r^2\mathrm{d}r\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$. $\triangle = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\partial_\theta) + \frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\varphi^2$

B.7 Ansätze

Integral *HDI: Zu zeigen $f(x) = \int g(x)\mathrm{d}x$, zeige $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x) = g(x)$; definiere Integral als neue Funktion, forme um und finde Gleichung fürs Integral; Integral ableiten und mit PI DGL herleiten $\partial I = \int g\partial_x f \overset{pI}{=} a\int fg = aI \implies I = I_0 e^{ax}$; $f \notin L^1 \Rightarrow$ konvergenzerzeugender Faktor $e^{-|x|\delta}, e^{-\delta x^2}$; Fubini; Integrand zu Ableitung einer Funktion umformen (z.B. $\cos x\sin x = -\frac{1}{2}\partial_x cos^2 x$); partielle Integration.*

Fourierreihen *Reihenansatz gleiches Format wie Reihe der Randbedingung; sin, cos in exp-Darstellungen zerlegen; Reihendarstellung der Randbedingung einsetzen; PZB, Geometrische Reihe; Residuensatz; beachte n = 0.*

Fouriertransformation *Gaussfunktionen; Hermitefunktionen als EV der FT, $(P(x)e^{-x^2/2})^\wedge(k)$: $P(x)$ als Linearkombination von Hermitepolynomen schreiben; Residuensatz; Formel für rotationsinvariante Funktionen (beachte $k = 0$); gegeben f, zu zeigen $\hat{f} = g$: zeige alternativ $g^\vee = f$; beachte k = 0.*

Fundamentallösungen *Gleichung Fouriertransformieren, für Rücktransformation Residuensatz*

PDE *Periodische Funktion → FR; Separation probieren; Fouriertransformation in der Variable, in der die Anfangsbedinungen gegeben sind.*

B.8 PDEs

Schroedinger equation *Falls ψ_0 die TISE $\hat{H}\psi_0 = E\psi$ mit Eigenwert E löst, so ist $\psi = e^{-iEt/\hbar}\psi_0$ eine Lösung der TDSE $\hat{H}\psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)$.*

Heat equation *Ring (periodisch): Fourierreihenansatz, sonst allgemein $\mathbb{R}$: Lösung durch Faltung Wärmeleitungskern und Anfangsbedingung.*

Wave equation *Fouriertransformation der PDE, um eine DGL für $\hat{f}$ zu bekommen. Rücktransformieren.*

Saite *Separation der Variablen, Lösung als Superposition schreiben.*

Membran *Separation der Variablen, Koordinatentransformation zu Polarkoordinaten, Separation der Variablen, Bessel-DGL erkennen, Randbedingungen durch Nullstellen der Besselfunktionen festsetzen.*

Elektrostatik *Transformation zu Kugelkoordinaten, Separation der Variablen, Kugelfunktionen verwenden.*

Dirichlet, Neumann *Greensche Funktion aus Kapitel 5.3, Satz 3.1.*

B.9 Multiple Choice

$g(x) = \sin^{2017}(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$. Richtig: 1) $\lim_{n\to\pm\infty} n^{2018}|c_n| \to 0$, da $g \in C^\infty(\mathbb{R})$. 2) $c_n = 0$ für n gerade. 3) $c_{2017} = -2^{-2017}i$, da $\sin^{2017}(x) = (\frac{-i}{2}(e^{ix} - e^{-ix}))^{2017}$. Falsch: 4) $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n = 1$, da $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n = sin^{2017}(0) = 0$.

Richtig: 1) $\hat{f}$ ist stetig für alle $f \in L^1$. 2) Ist f gerade, so ist auch $\hat{f}$ gerade, da $e^{i(2017-n)x}e^{-inx} = e^{i(2017-2n)x}$. 3) Wenn $f(x) = 0$ für $|x| > 1$, dann ist $\hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R})$. Falsch: 4) $\hat{f}$ ist 2π-periodisch für alle $f \in L^1$.

$\triangle u = 0$ auf $B_1(\mathbb{R}^3)$ mit $u(x) = x_3^2$ für $|x| = 1$. Richtig: 1) $0 \leq u(x) \leq 1$ für alle $x \in B_1$. 2) $\max\{u(x), x \in B_1\} = 1$. Falsch: 3) $u(0) = 0$ 4) $\int_{B_1} u(x)\mathrm{d}x = 0$.

$\partial_x^2 u = \partial_t u$, $u(0,x) = 1/(1+x^2)^2$. Richtig: 1) $\int_\mathbb{R} u(x,t)\mathrm{d}x$ ist konstant in $t \geq 0$. 2) $lim_{t\to\infty}\hat{u}(k,t) = 0$ für alle $k \neq 0$. Falsch: 3) $u(x,t) = 0$ für alle (x,t), sodass $|x| > 1/\sqrt{t}$. 4) $\hat{u}(-k,t) = -\hat{k,}t$ für alle $t > 0, k \in \mathbb{R}$.

Sind zwei jeweilige Lösungen eindeutig? Richtig: 1) $\triangle u(x) = 0, x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, u rot.inv., $u(1,0,1) = 1$, $u(x) \to 0$ für $|x| \to \infty$. 2) $\triangle u(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}^n |x| < 1$, $u(x) = 1 \forall x \in \mathbb{R}^n |x| = 1$. Falsch: 3) $\triangle u(x) = 0, x \in \mathbb{R}^n$. 4) $\triangle u(x) = 0 \forall x \in \mathbb{R}^n |x| < 1$, $x\nabla u(x) = 0 \forall x \in \mathbb{R}^n |x| = 1$.

$f(x) = \sin(x)e^{-x^4}$. Richtig: 1) $\lim_{k\to\pm\infty}\partial_k^n\hat{f}(k) = 0 \forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. 2) $\hat{f} \in L^2$, da $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Falsch: 3) $\hat{f}(k) \in \mathbb{R} \forall k \in \mathbb{R}$, da f ungerade. 4) $\hat{f}$ ist glatt mit kompaktem Träger, da $\int_\mathbb{R}\cos(kx)e^{-x^4}\mathrm{d}x > 0 \forall k \in \mathbb{R}$.

$f(x) = e^{-x^4}$. Richtig: 1) $\lim_{k\to\pm\infty} k^n\hat{f}(k) = 0$. 2) $\hat{f} \in C^\infty$. 3) Es gibt eine holomorphe Funktion $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, so dass $\hat{f}(k) = F(k) \forall k \in \mathbb{R}$. Falsch: 4) $\hat{f}(0) = 0$.

$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^N \sum_{m=-l}^l a_{l,m} r l Y(\theta,\varphi)$. Richtig: 1) $\triangle u = 0$. 2) $\int_{\mathbb{R}^3}|u(x)|^2\mathrm{d}x = \sum_{l=0}^N \sum_{m=-l}^l |a_{l,m}|^2$. 3) $a_{l,m} = \int_0^{2\pi}\int_0^\pi \overline{Y_{l,m}(\theta,\varphi)}u(1,\theta,\varphi)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$. 4) Wenn $a_{l,m} = 0$ für $m \neq 0$, dann ist u invariant unter Rotationen um die z-Achse.

Welche Reihe konvergiert? Richtig: 1) $\sum_{l=0}^\infty l^2 2^{-l} P_l(x)$. 2) $\sum_{l=0}^\infty P_{n^2}(x)$. 3) $\sum_{l=0}^\infty \frac{(-1)^l}{\sqrt{l}} P_l(x)$. Falsch: 4) $\sum_{l=0}^\infty (-1)^l P_l(x)$.

Richtig: 1) $\int_{-1}^1 P_{23}(x)\mathrm{d}x = 0$, da $\langle P_0, P_{23}\rangle = 0$. 2) $\langle P_l, P_{l'}\rangle = 0$. Fal.: 3) $\langle P_l, P_l\rangle = 1$.

Was definiert temperierte Distribution? Richtig: 1,2) $\varphi \mapsto \int_\mathbb{R} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$ für $f \in L^1(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R})$. Falsch: 3) $\varphi \mapsto \int_\mathbb{R} e^{x^2}\varphi(x)\mathrm{d}x$. 4) $\varphi \mapsto \sup_{x\in\mathbb{R}}\varphi(x)$, da nicht linear.

Richtig: 1) $x\delta'(x) = -\delta(x)$. 2) $\int_\mathbb{R}\delta'(x)\varphi(x+a)\mathrm{d}x = -\delta'(a)$. 3) $\partial_x^3|x| = 2\delta'(x)$. 4) $x^2\delta' = 0$. Falsch: 5) $\delta'(2x) = 2\delta'(x)$. 6) $x\delta' = 0$, da z.B. $x\delta'[e^{-x^2}] = \delta[(xe^{-x^2})'] = -1$. 7) $\delta(3x) = 3\delta(x)$, da $\delta(3x) = \frac{1}{3}\delta(x)$. 8) $\hat{\delta}(k) = \sum_{n=-\infty}^\infty k^n$, da $\hat{\delta}(k) = 1$.