Funktionentheorie

ETH Zurich

Janik Schuettler

HS17

Inhaltsverzeichnis

1 Komplexe Zahlen

Facts über $\mathbb{C}$ $(C, +, \cdot, 0, 1)$ ist ein (kommutativer) Körper. $\mathbb{C}$ ist vollständig, zusammenhängend, lokal kompakt. Als metrischer Raum ist $(\mathbb{C}, |\cdot|) \simeq (\mathbb{R}^2. |\cdot|_{euklid})$.

***i* Pontenzen 1** $i^1 = i \quad i^2 = -1 \quad i^3 = -i \quad i^4 = +1$

***i* Pontenzen 2** $i^5 = i \quad i^6 = -1 \quad i^7 = -i \quad i^8 = +1$

1.1 Kartesische und polare Darstellung

$\mathbb{C}$ Addition $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

$\mathbb{C}$ Multiplikation $z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$

$\mathbb{C}$ Inverse $\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

Betrag $|z| = |x + iy| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$

Quadrat $z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy, \quad$ aber $|z|^2 = x^2 + y^2$

Komplexe Konjugation $\bar{z} = \overline{x + iy} = x - iy$

Komplexe Konjugation unter Addition $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

Komplexe Konjugation unter Multiplikation $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

Real und Imaginärteil $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \quad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$

Polardarstellung $z = re^{i\theta}$, wobei $r = |z|$, $\theta = \arctan(\frac{y}{x})$

Kartesisch $re^{i\theta} = x + iy$, wobei $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

1.2 Matrixdarstellung

Definition $z = x + iy \mapsto M(z) = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}_{2,2}(\mathbb{R})$

Imaginäre Einheit $i \mapsto M(i) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}_{2,2}(\mathbb{R})$

$\mathbb{C}$ Addition $z_1 + z_2 \mapsto M(z_1 + z_2) = M(z_1) + M(z_2)$

$\mathbb{C}$ Multiplikation $z_1 \cdot z_2 \mapsto M(z_1 \cdot z_2) = M(z_1) \cdot M(z_2)$

$\mathbb{C}$ Inverse $z^{-1} \mapsto M(z^{-1}) = M(z)^{-1}$

Betrag $|z| \mapsto \sqrt{\det M(z)}$

Komplexe Konjugation $\bar{z} \mapsto M(\bar{z}) = M(z)^T$

Komplexe Konjugation unter Addit. $\overline{z_1 + z_2} \mapsto M(z_1)^T + M(z_2)^T$

Komplexe Konjugation unter Multip. $\overline{z_1 \cdot z_2} \mapsto M(z_1)^T M(z_2)^T$

Rotation um θ ist $M(e^{i\theta})$

2 Komplexe Differenziebarkeit

Sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine komplexwertige Funktion auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$.

Definition 2.1 (Komplexe Differenzierbarkeit) *Die Funktion f ist* ***komplex differenzierbar*** *in $z_0 \in U$, falls der folgende Grenzwert existiert*

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(z + h) - f(z)}{h}.$$

Im metrischen Raum $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ ist f ***komplex differenzierbar*** *im Punkt $z_0 \in U$ mit Ableitung $f'(z_0)$, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass für alle $z \in U \backslash \{z_0\}$ mit $|z - z_0| < \delta$ gilt*

$$\left| f'(z_0) - \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| < \varepsilon.$$

Definition 2.2 (Analytizität, Holomorphie) *Die Funktion f ist* ***analytisch*** *auf U, falls f in jedem Punkt von U komplex differenzierbar ist und die entstehende Funktion $z \mapsto f'(z)$ stetig ist. Eine Funktion heisst* ***holomorph*** *genau dann, wenn sie analytisch ist.*

Lemma 2.3 (Kurven erhalten Ableitung) *Sei $\gamma : [-1, 1] \to U$ mit $\gamma(0) = z_0$ eine stetige einfache Kurve, d.h. γ ist eine stetige Funktion und ist injektiv. Wenn f komplex differenzierbar im Punkt $z_0 \in U$ ist, dann existiert der folgende Grenzwert und es gilt*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\gamma(t)) - f(\gamma(0))}{\gamma t - \gamma 0} = f'(z_0).$$

Beispiel 2.4 (Analytischer Funktionen)

- *Polynome, konvergente Potenzreihen, insbesondere e^z,* cos, sin
- *Gleichmässige Grenzwerte analytischer Funktionen*
- *Spezielle Funktionen wie die Gammafunktion $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} \, dt$ für $\operatorname{Re} z > 0$ oder die Riemannsche Zetafunktion $\zeta(z) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^z}$ für $\operatorname{Re} z > 1$.*

Beispiel 2.5 (Nicht analytische FUnktionen)

- $f(z) = |z|^n$

Beispiel 2.6 (Komplexe Wurzel) *Es existiert keine komplexe Wurzelfunktion, d.h. $f : \mathbb{C} \backslash \{0\} \to \mathbb{C} \backslash \{0\}$ mit $f^2(z) = z$.*

3 Cauchy-Riemann Gleichungen

Theorem 3.1 (Analytizität über Cauchy-Riemann Gleichungen) *Sei $f = u + iv$ eine komplexwertige Funktion auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$. Dann ist f analytisch auf U genau dann, wenn u und v stetig differenzierbar sind und die Cauchy-Riemann Gleichungen erfüllt sind*

$$\begin{aligned} \partial_x u &= \partial_y v \\ \partial_y u &= -\partial_x v \end{aligned} \qquad \text{(Cauchy-Riemann Gleichungen)}$$

Korollar 3.2 (Ableitung über Cauchy-Riemann Gleichungen) *Ist f komplex differenzierbar in $z_0 \in U$, gilt*

$$f'(z_0) = \partial_x u(z_0) + i\partial_x v(z_0) = \partial_y v(z_0) - i\partial_y u(z_0).$$

Theorem 3.3 *Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge, $z_0 \in U$ und $f, g : U \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar an der Stelle z_0.*

(i) Dann ist $f + g : U \to \mathbb{C}$ an der Stelle z_0 komplex differenzierbar und es gilt

$$(f + g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0).$$

(ii) Dann ist $fg : U \to \mathbb{C}$ an der Stelle z_0 komplex differenzierbar und es gilt

$$(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0).$$

(iii) Sei $g(z) \neq 0$ für alle $z \in U$. Dann ist $f/g : U \to \mathbb{C}$ an der Stelle z_0 komplex differenzierbar und es gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g^2(z_0)}.$$

(iv) Seien $U, V \subset \mathbb{C}$ zwei offene Teilmengen und $z_0 \in U$. Sei $f : U \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar an der Stelle z_0, sodass $f(U) \subset V$, und sei $g : V \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar an der Stelle $w_0 := f(z_0)$. Dann ist die Komposition $g \circ f : U \to \mathbb{C}$ an der Stelle z_0 komplex differenzierbar und es gilt

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0).$$

4 Harmonische Funktionen

Definition 4.1 (Harmonische Funktionen) *Eine Funktion f heisst* ***harmonisch****, wenn sie zweimal differenzierbar ist und $\Delta f = 0$ gilt. Der* ***Laplace Operator*** *Δ auf $\mathbb{R}^2$ ist definiert als $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$.*

Lemma 4.2 (Real- und Imaginärteil sind harmonisch) *Sei $f = u + iv$ eine analytische Funktion auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$. Dann sind u und v harmonische Funktionen.*

Proof Da f zweimal stetig differenzierbar ist, gilt nach Cauchy-Riemann $\partial_x^2 u = \partial_{xy}^2 v$ und $\partial_y^2 u = -\partial_{yx}^2 v$. Dann ist $\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0$. $\square$

Definition 4.3 (Konjugiert harmonische Funktion) *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $u : U \to \mathbb{R}$ mit $\Delta u = 0$. Dann heisst $v : U \to \mathbb{R}$ mit $\Delta v = 0$ die* ***konjugiert harmonische Funktion*** *zu u, falls*

$$f = u + iv : U \to \mathbb{C}$$

analytisch auf U ist.

Beispiel 4.4 (u ohne harmonisch Konjugierte) *Für $U = \mathbb{C} \backslash \{0\}$ gibt es zu $u(x, y) = \log(x^2 + y^2)$ keine harmonisch konjugierte Funktion. Hat U keine Löcher, besitzt aber jede harmonische Funktion eine harmonisch konjugierte Funktion.*

5 Jacobi-Matrix

Jacobi-Matrix einer komplexwertigen Funktion $f = u + iv : U \to \mathbb{C}$ mit $u, v : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar an der Stelle $z_0 \in U$ ist

$$Df(z_0) = \begin{pmatrix} u_x(z_0) & u_y(z_0) \\ v_x(z_0) & v_y(z_0) \end{pmatrix}.$$

Die Jacobi-Matrix erzeugt eine lineare Abbildung

$$Df(z_0) : T_{z_0} \to T_{f(z_0)},$$

wobei $T_{z_0} \simeq \mathbb{R}^2$ der Tangentialraum im Punkt z_0 bezeichnet.

Lemma 5.1 (Jacobi-Matix analyt. Funktionen = Matrixdarstellung) *Sei f eine komplex differenzierbare Funktion. Dann ist die Jacobi-Matrix gleich der Matrixdarstellung*

$$\mathrm{D}f(z_0) = \begin{pmatrix} u_x(z_0) & u_y(z_0) \\ v_x(z_0) & v_y(z_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x(z_0) & -v_x(z_0) \\ v_x(z_0) & u_x(z_0) \end{pmatrix} = M(f'(z_)).$$

6 Konformalität

Definition 6.1 (Konformität) *Sei f eine stetig differenzierbare Funktion auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$. Dann ist f **konform** auf U, falls* $\det \dot{f} > 0$ *und f winkeltreu in jedem Punkt $z \in U$ ist, d.h.*

$$\frac{\langle \mathrm{D}f(z_0)\boldsymbol{v}, \mathrm{D}f(z_0)\boldsymbol{w}\rangle}{|\mathrm{D}f(z_0)\boldsymbol{v}||\mathrm{D}f(z_0)\boldsymbol{w}|} = \frac{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\rangle}{|\boldsymbol{v}||\boldsymbol{w}|}$$

für alle $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in T_{z_0} \simeq \mathbb{R}^2$.

Bildlich werden also Winkel durch konforme Abbildungen nicht verzerrt.

Lemma 6.2 (Analytizität und Konformität) *Sei f eine stetig differenzierbare Funktion auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$. Dann ist f konform auf U genau dann, wenn f analytisch auf U mit f' nie 0 ist. Für analytische f ist $\det \mathrm{D}f(z) = |f'(z)|^2 > 0$.*

Beispiel 6.3 *$f(z) = \bar{z}$ ist winkeltreu, aber nicht konform, weil $\det \mathrm{D}f = -1$.*

7 Polynome

Lemma 7.1 *Die konstanten Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f'(z) = 0$, die Identität $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f'(z) = 1$ und polynomiale Funktionen $f(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ mit $f'(z) = \sum_{k=0}^n k a_k z^{k-1}$ und $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ sind analytisch.*

Theorem 7.2 (Analytizität und Ableitung von Polynomen) *Seien f, g analytische Funktionen auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$. Dann ist*

(i) $f + g$ analytisch auf U mit $(f+g)' = f' + g'$,

(ii) $f \cdot g$ analytisch auf U mit $(f \cdot g)' = f'g + fg'$.

Proof Mit Definition. □

Korollar 7.3 *Sei $f(z)$ ein Polynom. Dann gilt*

$$\Delta \operatorname{Re} f(x+iy) = 0 \quad \textit{und} \quad \Delta \operatorname{Im} f(x+iy) = 0.$$

Real- und Imaginärteil analytischer Funktionen sind harmonisch, d.h. Laplace Re/ Im f(x+iy)=0

8 Eigenschaften analytischer Funktionen

Lemma 8.1 (Konstanz über Ableitung) *Sei f eine analytische Funktion auf einer offenen zusammenhängenden Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$ mit $f'(z) = 0$ für alle $z \in U$. Dann ist f konstant.*

Lemma 8.2 (Kettenregel über Kurven) *Sei f eine analytische Funktion auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$. Sei $\gamma : [0,1] \to U \subset \mathbb{C}$ differenzierbar. Dann gilt die Kettenregel $\partial_t f(\gamma(t)) = f'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$.*

Lemma 8.3 (Kettenregel) *Seien $U, V \subset \mathbb{C}$ offene Teilmengen und $g : U \to V$, $f : V \to \mathbb{C}$ analytische Funktionen. Dann ist $f \circ g : U \to \mathbb{C}$ analytisch und die Kettenregel ist erfüllt*

$$(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'.$$

Lemma 8.4 (Umkehrsatz) *Sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine analytische Funktion und sei $p \in U$ mit $f(p) = q$ und $f'(p) \neq 0$. Dann existieren eine offene Teilmenge $W \subset \mathbb{C}$ mit $q \in W$ und eine analytische Umkehrfunktion $g : W \to U$, sodass*

$$(f \circ g)(z) = z \quad \forall z \in W \qquad \textit{und} \qquad g'(q) = \frac{1}{f'(p)}.$$

9 Rationale Funktionen

Definition 9.1 (Rationale Funktion) *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f(z) = \frac{1}{z} : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ und seien $f(z), g(z)$ Polynome mit $g : U \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Definiere $\frac{1}{g(z)} = h \circ g : U \to \mathbb{C}$. Dann nennt man die Funktion $f \cdot \frac{1}{g} = \frac{f(z)}{g(z)} : U \to \mathbb{C}$ **rationale Funktion**.*

10 Potenzreihen

Definition 10.1 (Konvergenzradius) $0 \leq R \leq \infty$ *einer Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ mit komplexen Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots$ ist definiert als*

$$\frac{1}{R} = \limsup_{k \to \infty} |a_k|^{1/k}.$$

Lemma 10.2 (Quotientenkriterium) *Sei $\sum a_n z^n$ eine Potenzreihe mit $a_n \neq 0$ für $i \gg 0$. Falls der Grenzwert existiert, gilt dann*

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

Theorem 10.3 (Abel, Konvergenz von Potenzreihen) *Sei $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z$ eine Potenzreihe mit $\frac{1}{R} = \limsup_{k \to \infty} |a_k|^{1/k}$. Dann ist*

(i) $f(z)$ konvergent für $|z| < R$,

(ii) $f(z)$ gleichmässig konvergent auf $B(0, \rho)$ für $\rho < R$,

(iii) $f(z)$ nicht konvergent für $|z| > R$.

Lemma 10.4 *Da $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ vollständig ist, impliziert $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k \zeta^k| < \infty$, dass die Potenzreihe f(z) konvergent in $z = \zeta$ ist.*

Proof Zeige Cauchy-Kriterium. □

Theorem 10.5 (Analytizität und Ableitung von Potenzreihen) *Sei $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ eine Potenzreihe mit einem Konvergenzradius $R > 0$. Dann*

(i) ist f analytisch auf $B(0, R)$,

(ii) hat die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} k a_k z^{k-1}$ Konvergenzradius R,

(iii) ist $f'(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k \zeta^{k-1}$ für $\zeta \in B(0, R)$.

Proof (ii) berechne $\log R$ für f und f' (i), (iii) Teile f auf in erste n S_n und restliche Reihenglieder R_n und zeige, dass |Definition Ableitung von $f-$Ableitung von $f| <$ |setze Aufteilung von f ein $-S_n' + S_n'-$ Ableitung $| <$ |Definition Ableitung $S_n - S_n'| +$ |Definition Ableitung $R_n| + |S_n'-$Ableitung von $f|$ klein ist. □

Korollar 10.6 *Ist f analytisch mit Konvergenzradius R, dann sind auch $f', f'', f''', \ldots$ analytisch auf $B(0, R)$. Damit ist $f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ unendlich oft differenzierbar und es gilt $\partial_z^n f(0) = n! a_n$.*

11 Exponentialfunktion, Sinus, Kosinus, Logarithmus

Definition 11.1 (Exponentialfunktion, Sinus, Kosinus) *Die Exponentialfunktion ist definiert als*

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \ldots$$

Weiters definieren wir

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \text{und} \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Lemma 11.2 *Die Exponentialfunktion hat Konvergenzradius $R = \infty$.*

Proof $\limsup_{k\to\infty}(\frac{1}{k!})^{1/k} \leq \limsup_{k\to\infty} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{k}} = 0$ □

Theorem 11.3 (Eigenschaften von exp, sin, cos)

(i) $\exp, \sin, \cos$ *sind analytisch auf* $\mathbb{C}$

(ii) $\partial_z \exp z = \exp$, $\partial_z \sin z = \cos z$, $\partial_z \cos z = -\sin z$

(iii) $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \cdot \exp(z_2)$ *für* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

(iv) $\exp(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$

(v) $\exp$ *ist konform auf* $\mathbb{C}$, *da* $\exp'(z) = \exp(z) \neq 0$ *für* $z \in \mathbb{C}$

(vi) $z \in \mathbb{R} \implies \sin z, \cos z \in \mathbb{R}$

12 Algebra von Potenzreihen

Existenz Sei f eine analytische Funktion in einer Umgebung von $0 \in \mathbb{C}$. Es gibt eine Potenzreihe mit komplexen Koeffizienten und einem positiven Konvergenzradius $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, die f darstellt.

Analytizität Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ eine Potenzreihe mit komplexen Koeffizienten und einem positiven Konvergenzradius. Die Funktion $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ ist analytisch innerhalb des Konvergenzradius.

Eindeutigkeit 1 Seien f, g zwei analytische Funktionen, deren Potenzreihenentwicklungen im Punkt $0 \in \mathbb{C}$ gleich sind. Dann haben wir $f = g$ in einer Umgebung von $0 \in \mathbb{C}$.

Eindeutigkeit 2 Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ zwei Potenzreihen mit positiven Konvergenzradien, die die gleiche Funktion in einer Umgebung von $0 \in \mathbb{C}$ darstellen. Dann haben wir $a_k = b_k$ für alle k vom Satz von Abel.

Seien $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ und $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ zwei Potenzreihen mit positiven Konvergenzradien.

Addition/ Subtraktion von Potenzreihen
$(f \pm g)(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(a_k \pm b_k) z^k$

Multiplikation von Potenzreihen (Cauchy-Produkt)
$(f \cdot g)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ mit $c_k = \sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l}$

Inversion von Potenzreihen Wenn $a_0 \neq 0$, ist $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = a_0 \left(1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{a_0} z^k\right)$ mit $a_0 \neq 0$. Dann ist

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{a_0}\left(1 - \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{a_0} z^k\right) + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{a_0} z^k\right)^2 - \ldots\right).$$

Division von Potenzreihen Wenn $b_0 \neq 0$, können wir dividieren

$$\frac{f(z)}{g(z)} = f(z)\frac{1}{g(z)} =$$
$$\frac{a_0}{b_0} - \frac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{b_0^2} z - \frac{a_0 b_0 b_2 - a_0 b_1^2 + a_1 b_0 b_1 - a_2 b_0^2}{b_0^3} z^2 + \ldots.$$

Wenn $b_0 = 0$ ist, ist $\frac{f(z)}{g(z)}$ nicht immer eine analytische Funktion in einer Umgebung von $0 \in \mathbb{C}$.

13 Kurven und Kurvenintegrale

Definition 13.1 (Kurven) *Wir definieren die folgenden Kurven.*

*(i) Eine **stetige Kurve** ist eine stetige Funktion* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$. *Die Orientierung der Kurve ist von* $\gamma(a)$ *nach* $\gamma(b)$.

*(ii) Eine **differenzierbare Kurve** ist eine differenzierbare Funktion* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ *mit Ableitung* $\gamma' : [a, b] \to \mathbb{C}$.

*(iii) Eine C^1 **Kurve** ist eine stetig differenzierbare Funktion* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ *mit stetiger Ableitung* $\gamma' : [a, b] \to \mathbb{C}$.

*(iv) Eine **stückweise** C^1 **Kurve** ist eine stetige Funktion* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ *mit endlicher Zerlegung* $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1} < a_n = b$, *sodass die Einschränkungen* $\gamma_i : [a_i, a_{i+1}] \to U$ C^1*-Kurven sind mit* $\gamma_i(a_i) = \gamma_{i+1}(a_i)$.

*Eine **Kurve** bezeichnet eine C^1 Kurve.*

Definition 13.2 (Kurvenintegral) *Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge, $f : U \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion und $\gamma : [a, b] \to U$ eine Kurve. Wir definieren das **Kurvenintegral über f entlang** γ als*

$$\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Für eine stückweise C^1-Kurve $\gamma : [a, b] \to U$ definieren wir das Kurvenintegral über f entlang γ als

$$\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Theorem 13.3 (Kurvenintegral von z^n) *Das Kurvenintegral über z^n entlang des Kreises γ_r ist*

$$\int_{\gamma_r} z^n\,\mathrm{d}z = \begin{cases} 0 & n \neq -1, \\ 2\pi i & n = -1. \end{cases}$$

Korollar 13.4 (Nicht-Existenz eines Logarithmus auf $\mathbb{C}$) *Es existiert keine Funktion $F : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ mit Ableitung $F' = \frac{1}{z}$.*

Proof Andernfalls wäre $\int_{\gamma} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = 0$. □

14 Umparametrisierung

Definition 14.1 (Umparametrisierung) *von $[a, b]$ ist eine stetig differenzierbare Funktion $\phi : [\hat{a}, \hat{b}] \to [a, b]$, sodass $\phi(\hat{a}) = a, \phi(\hat{b}) = b, \phi'(t) > 0$ für alle $t \in [\hat{a}, \hat{b}]$.*

Theorem 14.2 (Unabhängigkeit von Parametrisierung) *Das Kurvenintegral ist unabhängig von der Parametrisierung*

$$\int_{\gamma_r} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\hat{\gamma}} f(z)\,\mathrm{d}z$$

15 Berechnung der Länge

Definition 15.1 (Länge einer Kurve) *Sei $\gamma : [a, b] \to U$ eine Kurve. Wir definieren die **Länge von** γ als*

$$l(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Für eine stückweise C^1-Kurve $\gamma : [a, b] \to U$ definieren wir die Länge von γ als

$$l(\gamma) = \sum_{i=1}^{n} l(\gamma_i).$$

Lemma 15.2 (Standardabschätzung) *Seien $f : U \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion und $\gamma : [a, b] \to U$ eine Kurve. Sei M das Maximum von $|f(\gamma(t))|$ für $t \in [a, b]$. Dann gilt*

$$\left|\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq M \cdot l(\gamma).$$

16 Der Cauchysche Integralsatz

Theorem 16.1 (Cauchy 1) *Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge und $Q \subset \mathbb{C}$ eine achsenparallele abgeschlossene Rechtecksfläche vom Umfang l, die ganz in U liegt. Sei $\partial Q : [0, l] \to \mathbb{C}$ eine Randkurve mit positiver Orientierung und Länge l. Dann gilt für eine komplex differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{C}$*

$$\int_{\partial Q} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Theorem 16.2 (Cauchy 2) *Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge und $Q \subset \mathbb{C}$ eine achsenparallele abgeschlossene Rechtecksfläche vom Umfang l, die ganz in U liegt. Sei $\partial Q : [0, l] \to \mathbb{C}$ eine Randkurve mit positiver Orientierung und Länge l. Sei $\phi : Q \to U$ eine C^1-Abbildung. Dann gilt für eine komplex differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{C}$*

$$\int_{\phi\circ\partial Q} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Theorem 16.3 (Cauchy 3) *Seien $\overline{B}(z_0, R) \subset \mathbb{C}$ der abgeschlossene Ball mit Radius R und $\partial B(z_0, R) : [0, 2\pi] \to \overline{B}(z_0, R)$ die Randkurve mit positiver Orientierung. Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge mit $\overline{B}(z_0, R) \subset U$ und sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine komplex differenzierbare Funktion. Dann gilt*

$$\int_{\partial B(z_0,R)} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Korollar 16.4 *Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ eine geschlossene C^1-Kurve, d.h. $\gamma(a) = \gamma(b)$. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine komplex differenzierbare Funktion. Dann gilt*

$$\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

17 Homotopie von Kurven

Definition 17.1 (Homotopie) *Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge mit $p, q \in U$. Seien $\gamma, \hat{\gamma} : [0, 1] \to U$ zwei C^1-Kurven mit $\gamma(0) = \hat{\gamma}(0) = p$ und $\gamma(1) = \hat{\gamma}(1) = q$. Eine **$C^1$-Homotopie in** U zwischen γ und $\hat{\gamma}$ ist eine C^1-Funktion $\phi : [0, 1] \times [0, 1] \to U$, sodass für alle $s, t \in [0, 1]$ gilt*

$$\phi(s, 0) = p, \quad \phi(s, 1) = q, \quad \phi(0, t) = \gamma(t), \quad \phi(1, t) = \hat{\gamma}(t).$$

18 Die Cauchyformel

Theorem 18.1 (Cauchyformel) *Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge mit $\overline{B}(z_0, R) \subset U$ und sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine komplex differenzierbare Funktion. Für $a \in B(z_0, R)$ haben wir*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=R} \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z,$$
$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=R} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}z.$$

19 Der Mittelwertsatz

Theorem 19.1 (Mittelwertsatz, Funktion durch Randwerte bestimmt) *Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge mit $\overline{B}(z_0, R) \subset U$ und sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine komplex differenzierbare Funktion. Dann ist der Wert $f(z_0)$ ist der Mittelwert der Funktionswerte auf dem Rand des Kreises*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{it})\,\mathrm{d}t.$$

20 Die Potenzreihenentwicklung

Theorem 20.1 (Potenzreihenentwicklung) *Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge und sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine komplex differenzierbare Funktion. Dann gibt es für $z_0 \in U$ genau ein Potenzreihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

mit positiven Konvergenzradius, die in einer Umgebung von z_0 die Funktion f darstellt. Die Koeffizienten ergeben sich als

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=R} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\,\mathrm{d}z = \frac{f^k(z_0)}{k!}.$$

Theorem 20.2 (Taylor) *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ analytisch, $z_0 \in U$ und $r > 0$, sodass $B_r(z_0) \subset U$. Dann gilt:*

- *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert eine analytische Funktion $f_n : U \to \mathbb{C}$, sodass*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}}{k!} (z - z_0)^k + f_n(z)(z - z_0)^n$$

  ist für alle $z \in U$.

- *Sei f_n wie oben. Dan gilt*

$$f_n(z) = \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(z_0 + t(z - z_0))\,\mathrm{d}t$$

  für jedes $z \in B_r(z_0)$ und insbesondere $f_n(z_0) = f^{(n)}/n!$. Ist $0 < R < r$ und $\gamma_R(t) := z_0 + R^{2\pi i t}$ für $0 \le t \le 1$, dann gilt

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(w)\,\mathrm{d}w}{w - z_0)^n (w - z)}$$

  für jedes $z \in B_R(z_0)$.

- *Sei ρ der Konvergenzradius der Taylorreihe. Dann ist $\rho \ge r$ und*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

  für jedes $z \in B_r(z_0)$.

Theorem 20.3 (Goursat) *Sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine komplex differenzierbare Funktion auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$. Dann ist f unendlich oft differenzierbar.*

Korollar 20.4 *Eine Funktion f ist komplex differenzierbar auf U genau dann, wenn f analytisch auf U ist.*

Theorem 20.5 (Cauchysche Abschätzung für Potenzreihen) *Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge und $f : U \to \mathbb{C}$ eine analytische Funktion. Sei $|f(z)| < M$ für alle $z \in \partial B(z_0, R)$. Dann gilt*

$$|a_k| \le \frac{M}{R^k}.$$

Proof Standardabschätzung und Formel für Koeffizienten aus der Cauchyformel. □

Definition 20.6 (Ganze Funktionen) *sind analytische Fkt. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.*

Theorem 20.7 (Liouville) *Jede beschränkte ganze Funktion ist konstant.*

Proof Cauchy Abschätzung mit $R \to \infty$. □

21 Nullstellen

Vorüberlegungen Sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine analytische Funktion auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$ und $z_0 \in U$ ein Punkt mit $f(z_0) = 0$. Wir nehmen an, dass f nicht konstant in der Nähe von z_0 ist. Dann sind nicht alle $a_k = 0$.

Definition 21.1 (Ordnung einer Nullstelle) *ist das kleinste $n \ge 1$ mit $a_n \neq 0$. Anders ausgedrückt ist ein Punkt $z_0 \in U$ eine Nullstelle mit Ordnung $n > 0$ von f, falls $\partial_z^n f(z_0) \neq 0$, aber $\partial_z^k f(z_0) = 0$ für $0 \le k < n$.*

Lemma 21.2 *Ist $z_0 \in U$ eine Nullstelle mit Ordnung $n > 0$, dann ist $f(z_0) = 0$ und f ist nicht konstant in der Nähe von z_0.*

Theorem 21.3 (Darstellung einer Funktion um eine Nullstelle) *Sei z_0 eine Nullstelle einer analytischen Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ mit Ordnung $n > 0$. Dann existiert eine analytische Funktion $g : W \to \mathbb{C}$ definiert in einer Umgebung $W \subset U$ von z_0 mit*

$$f(z) = g(z)^n \quad \forall z \in W.$$

Korollar 21.4 *Es existiert eine offene Teilmenge $\hat{U} \subset U$, sodass $z_0 \in \hat{U}$ und $g : \hat{U} \to g(\hat{U})$ bijektiv ist mit $g(\hat{U}) \subset \mathbb{C}$.*

Korollar 21.5 (Nullstellen sind isoliert) *Sei z_0 eine Nullstelle einer analytischen Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ mit Ordnung $n > 0$. Dann ist z_0 eine isolierte Nullstelle und $f(U)$ enthält eine offene Umgebung um 0, d.h. es existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(z_0) \subset U$, sodass*

$$0 < |z - z_0| < \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad f(z) \neq 0.$$

Korollar 21.6 *Sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine analytische Funktion auf einer offenen zusammenhängenden Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$. Falls es eine nicht-leere offene Teilmenge $W \subset U$ gibt mit f konstant auf W, dann ist f konstant auf U.*

Theorem 21.7 (Gebietstreue) *Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene und zusammenhängende Teilmenge und sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine nicht-konstante analytische Funktion. Dann ist $f(U) \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge.*

Theorem 21.8 (Maximumsprinzip) *(i) Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene und zusammenhängende Teilmenge und sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine nicht-konstante analytische Funktion. Dann hat die Funktion $U \to \mathbb{R} : z \mapsto |f(z)|$ kein Maximum in U.*

(ii) Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine beschränkte offene Teilmenge und $f : \overline{U} \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion deren Einschränkung auf U analytisch ist. Dann gilt

$$\max_{U} |f| = \max_{\partial U} |f|.$$

Proof Gebietstreue, offene Mengen besitzen kein Betragsmaximum. □

Theorem 21.9 (Schwarzsches Lemma) *Sei $f : B(0,1) \to B(0,1)$ eine nicht-konstante analytische Funktion mit $f(0) = 0$. Dann gilt*

(i) $|f(z)| < |z|$ für alle $z \in B(0,1)$,

(ii) $|f'(0)| \leq 1$.

Existiert dazu ein $z_0 \in B(0,1) \backslash \{0\}$ mit $|f(z_0)| = |z_0|$ oder $|f'(0)| = 1$, so existiert ein $\theta \in \mathbb{R}$, sodass für alle $z \in B(0,1)$

$$f(z) = ze^{i\theta}.$$

Theorem 21.10 (Identitätssatz) *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend. Zwei analytische Funktionen $f, g : U \to \mathbb{C}$, die auf einer Teilmenge $S \subset U$ mit Häufungspunkt in U übereinstimmen, stimmen auf ganz U überein.*

Proof $h = f - g$, $h|_S \equiv 0$, Unterscheidung h konstant/ nicht konstant. Ang. h nicht konstant, ist h nicht konstant um z_0 (U zusammenhängend) und damit Nullstelle bei z_0 isoliert. □

22 Satz von Morera

Theorem 22.1 (Morera) *Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge und sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Wenn für alle geschlossenen Dreiecksflächen $\Delta \subset U$ gilt*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\, \mathrm{d}z = 0$$

dann ist f analytisch auf U.

Theorem 22.2 (Schwarzsches Spiegelungsprinzip) *Sei D ein zur reellen Achse symmetrisches Gebiet (d.h. $z \in D$ genau dann, wenn $\bar{z} \in D$). Weiter sei $D_+ = \{z \in D\colon \operatorname{Im} z > 0\}$, $D_- = \{z \in D\colon \operatorname{Im} z < 0\}$ und $D_0 = D \cap \mathbb{R}$. Ist $f\colon D_+ \cup D_0 \to \mathbb{C}$ stetig, $f|D_+$ analytisch und $f(D_0) \subset \mathbb{R}$, dann ist die durch*

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & \text{für } z \in D_+ \cup D_0 \\ \overline{f(\bar{z})} & \text{für } z \in D_- \end{cases}$$

definierte Funktion $\tilde{f}\colon D \to \mathbb{C}$ analytisch.

23 Polynome

Definition 23.1 *Ein Polynom f*

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

hat Grad n, wenn $a_n \neq 0$ gilt. Das Polynom f heisst normiert, wenn $a_n = 1$ gilt.

Theorem 23.2 (Fundamentalsatz der Algebra) *Jedes Polynom vom Grad ≥ 1 hat mindestens eine Nulstelle in $\mathbb{C}$.*

24 Laurentreihen

Definition 24.1 (Laurentreihe) *$f(z)$ im Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ besteht aus den zwei Potenzreihen*

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}(z - z_0)^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

*Wir bezeichnen die erste Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}(z - z_0)^{-k}$ als den **Hauptteil**, die zweite Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ als den **Nebenteil** der Laurentreihe.*

Konvergenz Seien R_- der Konvergenzradius des Hauptteils und R_+ der Konvergenzradius des Nebenteils der Laurentreihe. Für $\frac{1}{R_1} < R_-$ und $R_2 < R_+$ ist die Laurentreihe konvergent auf $B(0, R_1, R_2)$, wobei $0 < R_1 < R_2 < \infty$ reelle Zahlen sind.

Theorem 24.2 (Laurentreihenentwicklung) *Es gibt genau eine konvergente Kaurentreihe auf $B(z_0, R_1, R_2)$, die die Funktion f darstellt.*

Theorem 24.3 (Laurent) *Seien $a \in \mathbb{C}$ und $0 \leq R_0 \leq R_1 \leq \infty$ gegeben. Sei $U \subset \mathbb{C}$ der offene Kreisring*

$$U := \{z \in \mathbb{C} : R_0 < |z_0 - a| < R_1\}$$

und $f : U \to \mathbb{C}$ eine analytische Funktion. Dann gilt:

(i) Es gibt eine Familie komplexer Zahlen $c_k \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$, sodass

$$\limsup_{k \to \infty} |c_{-k}|^{1/k} \leq R_0 < R_1 \leq \frac{1}{\limsup_{k \to \infty} |c_k|^{1/k}}$$

und für alle $z \in U$

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - a)^k$$

mit glm. Konvergenz auf jeder kompakten Teilmenge von U.

(ii) Die Koeffizienten c_k sind eindeutig bestimmt und es gilt

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{(z - a)^{k+1}}\, \mathrm{d}z$$

für $k \in \mathbb{Z}$ und $R_0 < r < R_1$, wobei $\gamma_r : [0,1] \to U$ durch $\gamma_r(t) := a + re^{2\pi i t}$ für $0 \leq t \leq 1$ definiert ist.

Theorem 24.4 (Cauchysche Abschätzung für Larentreihen) *Sei $R \in [R_1, R_2]$ und sei $|f(z)| < M$ für alle $z \in \partial B(z_0, R)$. Dann gilt*

$$|a_k| \leq \frac{M}{R^k}.$$

Proof Standardabschätzung und Cauchyformel für Koeffizienten. □

25 Isolierte Singulariäten

Definition 25.1 (Isolierte Singulariäten) *Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge mit $z_0 \in U$ und sei $f : U \backslash \{z_0\} \to \mathbb{C}$ eine analytische Funktion. Die isolierte Singularität z_0 ist*

*(i) eine **hebbare Singularität**, falls $a_k = 0$ für alle $k < 0$, oder alternativ, wenn $\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = 0$.*

*(ii) ein **Pol** der Ordnung n, falls es ein $n > 0$ gibt mit $a_{-n} \neq 0$ und aus $l < -n$ folgt, dass $a_l = 0$ ist oder alternativ, wenn $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$. Wir sagen, dass f auf U **meromorph** ist.*

*(iii) **wesentliche Singularität**, falls $a_n \neq 0$ unendlich oft für $n < 0$.*

Definition 25.2 (Meromorphie) *Ist eine Funktion f bis auf Pole analytisch auf U, so heisst sie **meromorph**.*

Heben hebbarer Singularitäten Sei z_0 ein hebbarer Poly von f. Definiere $\tilde{f} : U \to \mathbb{C}$ als

$$\tilde{f}|_{U \backslash \{z_0\}} = f \quad \tilde{f}(z_0) = a_0.$$

Weil die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ konvergent ist und $\tilde{f}$ auf $B(z_0, \varepsilon)$ darstellt, ist $\tilde{f}$ analytisch auf $B(z_0, \varepsilon)$. $\tilde{f}$ ist analytisch auf $U \backslash \{z_0\}$, weil f dort analytisch ist. Deshalb ist $\tilde{f}$ analytisch.

Zerlegung von Polen Sei z_0 ein Pol der Ordnung n von f. Dann können wir für $0 < |z - z_0| < \varepsilon$ schreiben

$$f(z) = \frac{g(z)}{z^n} \quad g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{-n+k} z^k$$

mit g analytisch auf $B(z_0, \varepsilon)$.

Beispiel 25.3 (Hebbare Singularitäten)

- $\frac{e^z - 1}{z}$ *in* 0
- $\frac{\cos z - 1}{z^2}$ *in* 0
- $\frac{1}{\sin 1/z}$ *in* 0

Beispiel 25.4 (Pole, meromorphe Funktionen)

- z^{-n} *in* 0 *mit Ordnung* n
- *Singularitäten rationaler Funktionen nie wesentlich*

Beispiel 25.5 (Wesentliche Singularität)

- $z \mapsto \exp(\pm 1/z^n)$ *in* 0

Theorem 25.6 (Riemannscher Hebbarkeitssatz) *Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge mit $z_0 \in U$ und sei $f : U \backslash \{z_0\} \to \mathbb{C}$ eine analytische Funktion. Wenn es ein ε und M gibt, sodass*

$$0 < |z - z_0| < \varepsilon \implies |f(z)| < M,$$

dann ist die isolierte Singularität z_0 hebbar.

Proof Annahmen zeigen, dass für kleine R f beschränkt ist, dann Cauchy-Abschätzung. □

Theorem 25.7 (Casorati-Weierstrass) *Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge mit z_0 und sei $f : U \backslash \{z_0\} \to \mathbb{C}$ eine analytische Funktion. Sei z_0 eine wesentliche Singularität von f. Dann ist für jede offene Teilmenge*

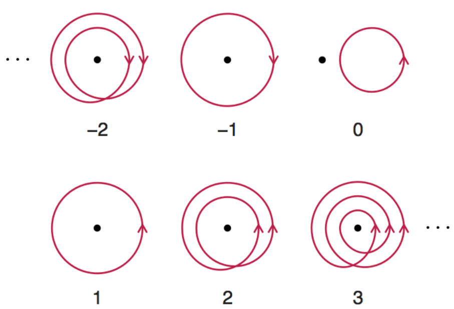
$$W_R = B(z_0, R) \cap (U \backslash \{z_0\}) \subset U \backslash \{z_0\}$$

$f(W_R)$ offen und dicht in $\mathbb{C}$.

26 Der Residuensatz

Theorem 26.1 (Residuensatz) *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend. Es sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine bis auf isolierte Singularitäten in U analytische Funktion und $S \subset U$ die Menge dieser Singularitäten. Sei ferner γ ein Zykel in U, der S nicht trifft und keinen Punkt ausserhalb U umläuft. Dann umläuft γ nur endlich viele Punkte aus S und es gilt die Residuenformel*

$$\int_\gamma f(z)\, \mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{a \in S} \nu_\gamma(a) \mathrm{Res}_a f.$$



Definition 26.2 (Residuum) *von f in der isolierten Singularität z_0 ist*

$$\mathrm{Res}_{z_0}(f) = a_{-1}.$$

Lemma 26.3 *Für hebbare Singularitäten ist das Residuum Null. Für alle isolierten Singularitäten z_0 haben wir für δ klein*

$$\mathrm{Res}_{z_0}(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z - z_0| = \delta} f(z)\, \mathrm{d}z.$$

Lemma 26.4 (Berechnung von Residuen) *Hat $f(z)$ bei z_0 einen Pol höchstens k-ter Ordnung und*

(i) $\mathrm{ord}(f, z_0) \geq -1$*, dann gilt*

$$\mathrm{Res}_{z_0} f = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$$

(ii) $\mathrm{ord}(f, z_0) = -k$*, dann gilt*

$$\mathrm{Res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \partial_z^{(k-1)}|_{z_0} (z - z_0)^k f(z).$$

(iii) f holomorph an z_0 (insbesondere $f \equiv 1$) und hat g eine einfache Nullstelle in z_0, dann gilt

$$\mathrm{Res}_{z_0}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}$$

(iv) $\mathrm{ord}(f, z_0) = -1$ *und g holomorph auf $B_\varepsilon(z_0)$, dann gilt*

$$\mathrm{Res}_{z_0}(fg) = g(z_0) \mathrm{Res}_{z_0} f$$

(v) $\mathrm{Res}_{z_0} f' = 0$

(vi) Für gerade f ist $\mathrm{Res}_0 f(z) = 0$.

Theorem 26.5 (Prinzip vom Argument) *Sei $U \subset \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend, f auf U meromorph mit Nullstellen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in U$ und Polstellen $a_1, \ldots, a_m \in U$. Dann gilt für jede geschlossene Kurve γ, die $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m, a_1, \ldots, a_n\}$ nicht trifft*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, \mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{ord}(f, \alpha_j) + \sum_{j=1}^{m} \mathrm{ord}(f, a_j).$$

27 Der Residuenkalkül

27.1 Typ I

Theorem 27.1 (Typ I) *Sei $S(x)$ eine reelle rationale Funktion ohne Pole in $\mathbb{R}$ mit $\deg(S) \leq -2$. Dann ist*

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(x)\, dx = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\, b > 0} \mathrm{Res}(S(z), b).$$

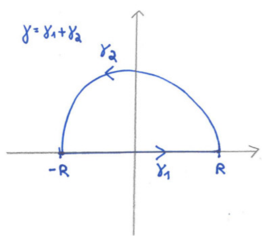
Strategie Integration der Funktion $S(z)$ über den Hilfsweg γ und Grenzwertübergang $R \to \infty$. Dabei gilt

$$\int_{\gamma_1} S(z)\, dz \to \int_{-\infty}^{\infty} S(x)\, dx$$

und

$$\int_{\gamma_2} S(z)\, dz \to 0,$$

weil $|S(z)| \leq c \frac{1}{|z|^2}$ für grosse $|z|$.



27.2 Typ II

Theorem 27.2 (Typ II) *Sei $S(x)$ eine reelle rationale Funktion ohne Pole in $\mathbb{R}$ mit $\deg(S) \leq -2$. Dann ist*

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(x) e^{ix}\, dx = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\, b > 0} \mathrm{Res}(S(z) e^{iz}, b).$$

und daher

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(x) \cos(x)\, dx = \mathrm{Re}\ 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\, b > 0} \mathrm{Res}(S(z) e^{iz}, b)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(x) \sin(x)\, dx = \mathrm{Im}\ 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\, b > 0} \mathrm{Res}(S(z) e^{iz}, b).$$

Strategie (genauso wie bei Typ I) Integration der Funktion $S(z)e^{iz}$ über den Hilfsweg γ und Grenzwertübergang $R \to \infty$. Dabei gilt

$$\int_{\gamma_1} S(z)e^{iz}\,dz \to \int_{-\infty}^{\infty} S(x)e^{ix}\,dx$$

und

$$\int_{\gamma_2} S(z)e^{iz}\,dz \to 0,$$

weil $|S(z)| \le C\frac{1}{|z|^2}$ für grosse $|z|$ und $|e^{iz}| < 1$ für $\operatorname{Im} z > 0$.

27.3 Typ III

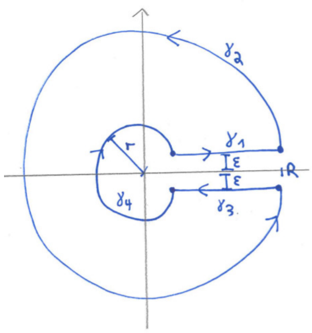
Theorem 27.3 (Typ III) *Sei $S(x)$ eine reelle rationale Funktion ohne Pole in $]0,\infty[$ mit $\deg(S) \le -2$ und höchstens einem einfachen Pol in 0. Sei $0 < a < 1$. Dann ist*

$$\int_0^\infty x^a S(x)\,dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i a}} \sum_{b \neq 0} \operatorname{Res}(S(z), b).$$

Strategie Integration der Funktion $z^a S(z)$ über den Schlüssellochweg γ und Grenzwertübergang $R \to \infty$, $\varepsilon, r \to 0$. Wir verwenden den Zweig

$$z^a = e^{a \ln(|z|) + ia\arg(z)}$$

auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\ge 0}$ mit $\arg(z) \in (0, 2\pi)$.



Dabei gilt

$$\int_{\gamma_1} z^a S(z)\,dz \to \int_0^\infty x^a S(x)\,dx$$

und

$$\int_{\gamma_3} z^a S(z)\,dz \to -e^{2\pi i a}\int_0^\infty x^a S(x)\,dx$$

weil z^a an der Linie $[0,\infty]$ um den Faktor $e^{2\pi i a}$ springt.

Die Standardabschätzungen liefern

$$\int_{\gamma_2} z^a S(z)\,dz \to 0 \quad \text{und} \quad \int_{\gamma_4} z^a S(z)\,dz \to 0.$$

27.4 Typ IV

Theorem 27.4 (Typ IV) *Sei $R(x,y)$ eine rationale Funktion. Dann können wir Integrale der Form $\int_0^{2\pi} R(\cos(t), \sin(t))\,dt$ mit der Substitution $z = e^{it}$ auf komplexe Kurvenintegrale von rationalen Funktionen über den Einheitskreis zurückführen. Es gilt:*

$$\int_0^{2\pi} R(\cos(t), \sin(t))\,dt = \int_{|z|=1} R\left(\frac{z + 1/z}{2}, \frac{z - 1/z}{2i}\right)\frac{1}{iz}\,dz.$$

Beispiel 27.5 *Sei $a > 1$. Dann ist*

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{1}{a + \cos(t)}\,dt &= \frac{1}{i}\int_{|z|=1} \frac{1}{a + \frac{z+1/z}{2}}\frac{dz}{z} \\ &= \frac{2}{i}\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 2az + 1} \\ &= 4\pi \operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z - z_1)(z - z_2)}, z_1\right) \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}.\end{aligned}$$

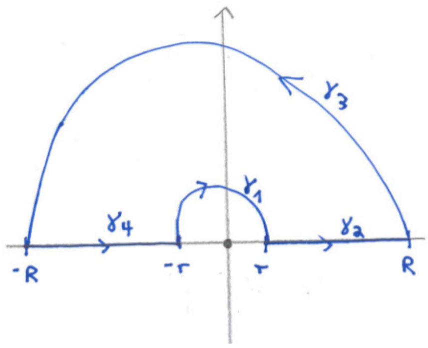
wobei $z_1 = -a + \sqrt{a^2 - 1}$ und $z_2 = -a - \sqrt{a^2 - 1}$.

In vielen Fällen muss man diese Strategien anpassen.

Beispiel 27.6 *Wir wollen*

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx$$

berechnen. Die Funktion $\frac{e^{iz}}{z}$ hat aber einen einfachen Pol in 0. Deshalb wählen wir einen Integrationsweg, der 0 in einem kleinen Halbkreis umgeht.



Beim Grenzwertübergang $R \to \infty$, $r \to 0$ erhalten wir

$$\int_{\gamma_4 + \gamma_2} \frac{e^{iz}}{z}\,dz \to 2i\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx.$$

In einer Umgebung von 0 können wir $\frac{e^{iz}}{z} = \frac{1}{z} + g(z)$ mit $g(z)$ analytisch um 0 schreiben. Also

$$\int_{\gamma_1} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = \int_{\gamma_1} \frac{1}{z} + \int_{\gamma_1} g(z) \to -\pi i + 0.$$

Durch Parametrisierung $\gamma_3(t) = Re^{it}$ und mithilfe von $\frac{2t}{\pi} \le \sin(t)$ für $0 \le t \le \pi/2$ zeigt man $\int_{\gamma_3} \frac{e^{iz}}{z}\,dz \to 0$. Also $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$.

28 Riemannscher Abbildungssatz

Definition 28.1 (Biholomorphie) *Eine biholomorphe oder schlichte Abbildung ist eine bijektive analytische Abbildung mit analytischer Umkehrabbildung.*

Definition 28.2 (Möbiustransformation) *sind Funktionen der Form*

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

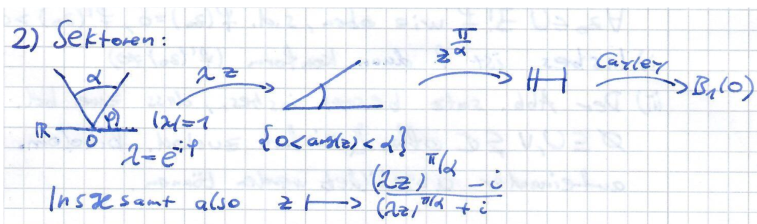
mit $a, b, c, d \in \mathbb{C}$.

Konkrete Möbiustransformation ϕ_M mit $\phi_M(z_1) = 0$, $\phi_M(z_2) = 1$, $\phi_M(z_3) = \infty$ für verschiedene $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ ist gegeben durch

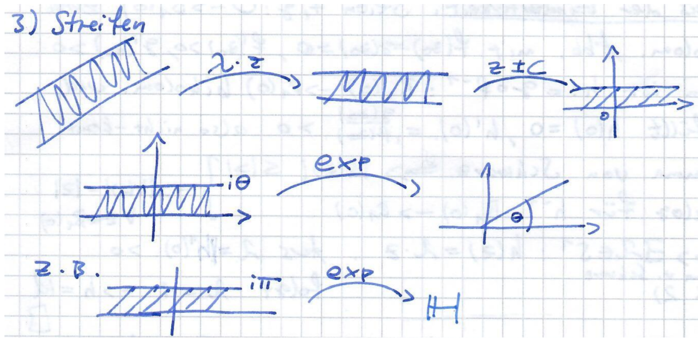
$$\phi_M(z) = \frac{z - z_1}{z - z_3}\frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}.$$

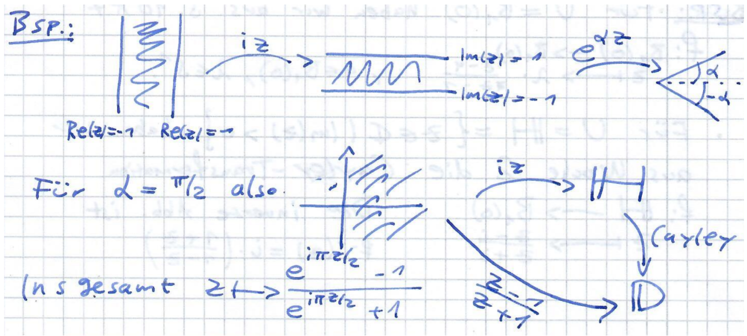
Drehung um Winkel ϕ in mathematisch positive Richtung sind $z \mapsto e^{i\phi}z$. Zum Beispiel $z \mapsto iz$ Drehung um 90° gegen Uhrzeigersinn.

Sektoren mit Öffnungswinkel α und Winkel zur reellen Achse ϕ. Drehung auf reelle Achse über $z \mapsto e^{-i\phi}z$, Öffnung auf ganz $\mathbb{H}$ mit $z \mapsto z^{\pi/\alpha}$.



Streifen können mit $z \mapsto e^{i\phi}z$ um Winkel ϕ gedreht werden und mit $z \mapsto z \pm c$ um c verschoben werden. e^z





Möbiustransformation $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$ **(Cayley-Transformation)** Allgemeine Cayley-Transformation $f_c(z) = \frac{z-c}{z+\bar{c}}$ für $c \in \mathbb{H}$

- $(\infty, 1, -1) \to (1, -i, i)$
- $\{z : \text{Re}(z) = 0\} \to \{z : \text{Im}(z) = 0\}$
- $\{z : \text{Im}(z) = 0\} \to \partial B(0,1)$
- $\mathbb{H} = \{z : 0 < \text{Im}(z)\} \to B(0,1)$
- Right-half plane $\to$ lower half plane
- $\{z : \text{Im}(z) = i\} \to B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

Möbiustransformation $f(z) = i\frac{z+1}{1-z}$ **(Inverse Cayley-Transformation)** Allgemeine Inverse $f_c(z) = \frac{c-\bar{c}z}{1-z}$ für $c \in \mathbb{H}$

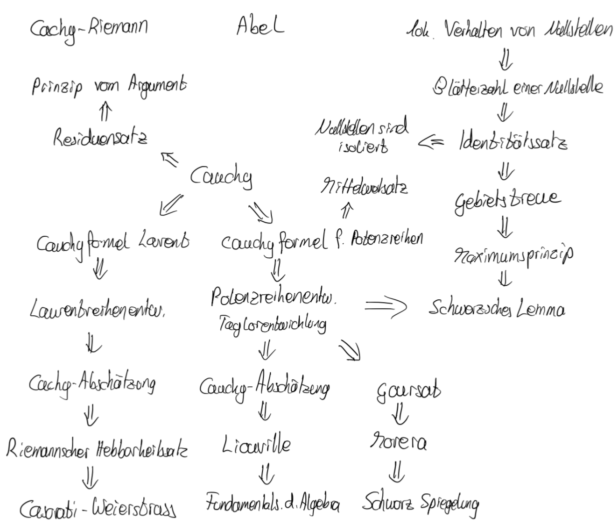
- $B(0,1) \to \mathbb{H} = \{z : 0 < \text{Im}(z)\}$

Möbiustransformation $f(z) = \frac{z+1}{z-1}$

- $\{z : \text{Re}(z) = 0\} \to B(0,1)\backslash\{1\}$
- $\{z : \text{Im}(z) = 0\} \to \mathbb{R}\backslash\{1\}$
- $\{z : \text{Re}\, z > 0\} \to \mathbb{C}\backslash\overline{B}(0,1)$
- $\{|z| < 1\} \to \{z : \text{Re}\, z < 0\}$

Autormorphismen auf $B(0,1)$ sind gegeben durch $f(z) = \lambda\frac{z-a}{\bar{a}z-1}$ mit $|\lambda| = 1$ und $|a| < 1$.

Theorem 28.3 (Riemannscher Abbildungssatz) *Jedes von ganz $\mathbb{C}$ verschiedene einfach zusammenhängende Gebiet ist konform äquivalent zur offenen Einheitskreisscheibe.*



A Misc

A.1 Funktionen

Definition	$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\backslash\{0\} : z \mapsto e^z = e^x e^{iy}$
Reihe	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \mathcal{O}(z^3)$
Konvergenzradius	$R = \infty$, analytisch auf ganz $\mathbb{C}$
Nullstellen	$\emptyset$
Singularitäten	eine wesentliche bei $x \to \infty$
S/I/B	surjektiv, aber nicht injektiv
Periodizität	2π-periodisch, d.h. $e^{z+2\pi ki} = e^z \ \forall k \in \mathbb{N}$

Logarithmus ist definiert für $\phi \in [0, 2\pi)$ als

$$\begin{aligned} \log : \mathbb{C}\backslash(D \cup \{0\}) \to & \{z : -\pi + \phi \le \text{Im}\, z < \pi + \phi\} \\ z \mapsto & \log|z| + i(\text{Arg} + \phi) \end{aligned}$$

wobei $\text{Arg} z \in [-\pi, \pi)$ und $D = \{z \in \mathbb{C} : \text{Arg} z = \phi - \pi\}$. Damit ist $\mathbb{C}\backslash(D \cup \{0\})$ eine geschlitzte Ebene, zum Beispiel für $\phi = 0$ ist $D = \mathbb{R}_{<0}$. Der Logarithmus berechnen sich als $\log(re^{i\theta}) = \log r + i\theta + i\phi$.

Reihe	$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \mathcal{O}(z^5)$

Definition	$\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\backslash\{0\} : z \mapsto \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$
Reihe	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(x-2\pi)^{2n+1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(x-\pi)^{2n+1}$
Nullstellen	$\pi\mathbb{Z}$

Definition	$\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\backslash\{0\} : z \mapsto \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$
Reihe	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(x-2\pi)^{2n} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(x-\pi)^{2n}$
Nullstellen	$\pi\mathbb{Z}$

A.2 Integrale

$\int_{\partial B(0,1)} |z|\, \mathrm{d}z = 0$, da $|z| = 1$ auf dem Rand und nach Cauchy

$\int_{\partial B(0,1)} \frac{1}{z^{42}(1-2z)} = 0$. Homotopie auf $\partial B(0, 1/2)$, **geometrische Reihe** für $\frac{1}{1-2z}$ ansetzen, um Residuum bei $z = 1/2$ herauszufinden, für $z = 0$ direkt. Residuensatz.

$\int_{\partial B(0,1)} \frac{\cos z}{\sin z}\, \mathrm{d}z = 2\pi i$, $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t^2+2t+2}\, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{e}\sin(-1)$. Direkt Residuensatz.

$\int_{\partial B(1,8)} \frac{1}{1-\cos z}\, \mathrm{d}z = 0$, da $\cos(z + 2\pi) = \cos(z)$, ist $\text{Res}_{2\pi} cos z = \text{Res}_0 \cos z = 0$, weil cos gerade.

$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 z}{z^2+1} = \pi\frac{1-e^{-2}}{2}$. $sin^2 z = \frac{1-\cos 2z}{2} = \text{Re}\left(\frac{1-\cos 2z}{2}\right)$. Residuensatz.

$\int_{\partial B(0,1)} \frac{\sin z \cos 3z}{z^4}\, \mathrm{d}z = -\frac{28\pi}{3}i$. Integrand in Potenzreihe entwickeln, um Residuum zu berechnen.

$\int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{2+\sin t}\, \mathrm{d}t$. Residuensatz Typ IV mit hässlichen Polstellen $z_{1,2} = i(\pm\sqrt{3} - 2)$.

$\int_\gamma z\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}$ mit $\gamma(t) = te^{2\pi i t}$. **Kurve schliessen** über γ_2, über Cauchy verschwindet das Integral über γ und γ_2, Integral über γ_2 ausrechnen.

$\int_{\gamma_1} \frac{\mathrm{d}z}{z}$ mit $\gamma_1 : t \in [-1,1] \mapsto t + i\cos(\pi/2t) = -\pi i$. Entweder über **Homotopie** zur oberen Hälfte vom Rand des Einheitskreises argumentieren (verkehrtherum durchlaufen) oder Kurve schliessen mit

$\int_0^\infty \frac{x^2}{x^4+1} = \pi\frac{\sqrt{2}}{4}$. Weil **Integrant gerade**, Integral auf $-\infty$ bis ∞ fortsetzen, Nullstellen ρ^i für z^2+1 berechnen, Residuensatz.

$\int_{\partial B(0,1)} \frac{\mathrm{d}z}{z^2 \sin z}$. **Residuum über Laurentreihe** berechnen, Residuens.

$\int_{|z-\frac{3}{2}|=1} \frac{e^z}{z(z-1)^3}\,\mathrm{d}z$. **Potenzreihe** um 1, um Residuum zu berechnen ($\frac{1}{z} = \frac{1}{1-(1-z)}$, geom. Reihe). Residuensatz.

$\int_{|z-1|=1} \frac{\sin(\pi z)}{(z^2-1)^2}\,\mathrm{d}z = \frac{-i\pi^2}{2}$ über **verallgemeinerte Cauchyformel** (braucht erste Ableitung von $\sin(\pi z)$).

$\int_{|z-2|=3} \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}\,\mathrm{d}z = 2i\pi(e^{36}-1)$. **Partialbruchzerlegung** $\frac{6}{z^2-6z} = \frac{1}{z-6} - \frac{1}{z}$, Residuensatz.

A.3 Existieren Funktionen, die...

- Es gibt keine analytische Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $|zf(z)| \le 1$ für $z \in \mathbb{C}$ und $f(0) = 1$, da f stetig, beschränkt auf $\overline{B}(0,1)$ und für $|z| > 1$ ist $|f(z)| \le 1/|z| < 1$, also global beschränkt, also konstant, also $f = 1$, Widerspruch zu $f < 1$.
- Für $f : B(0,1) \to \mathbb{C}, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ nicht-konstante analytische Funktionen ist $g \circ f$ nicht-konstant, da wegen Gebietstreue das Bild $g(f(B(0,1)))$ offen ist.
- Es gibt keine beschränkte, nicht-konstante, analytische Funktion $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$, da e^f auch beschränkt, analytisch und ganz, somit konstant wäre. Da exp surjektiv, auch f konstant.
- Es gibt keine ganze, nicht-konstante Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit beschränktem Realteil, weil e^f beschränkt wäre ($|e^f| = e^{\mathrm{Re} f}$), also e^f konstant $c \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, somit muss $f(z) \in e^c + 2\pi i\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Da Menge diskret, f stetig und $\mathbb{C}$ zusammenhängend, ist f konstant.
- Es existiert keine komplexe Wurzelfunktion, d.h. $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ mit $f^2(z) = z$ für $z \ne 0$, da $zw = f^2(zw) = f^2(z)f^2(w) = zw$ ist $h(z,w) = \frac{f(zw)}{f(z)f(w)} = \pm 1$, h ist stetig, $\mathbb{C}\backslash\{0\} \times \mathbb{C}\backslash\{0\}$ zusammenhängend, deshalb h konstant. Widerspruch $1 = f^2(1) = f(1)f(1) = f(1\cdot 1) = f((-1)(-1)) = f(-1)f(-1) = f^2(-1) = -1$.

Existiert eine nicht-konstante, analytische Funktion mit

- $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\backslash\{1\}$. Ja, $z \mapsto e^z + 1$
- $f : \mathbb{C} \to B(2,1)$. Nein, f wäre beschränkt und nach Liouville konstant.
- $f : \mathbb{C} \to \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\, z < (\mathrm{Re}\, z)^2\}$. Nein, da die Wertemenge nach Riemann biholomorph auf $B(0,1)$ abgebildet werden kann und das Problem deswegen äquivalent ist zu $f : \mathbb{C} \to B(0,1)$. Solch eine Abbildung wäre aber beschränkt und nach Liouville konstant.
- $f : B(0,1) \to B(0,1)$ mit $f(0) = \frac{i}{2}$ und $f(\frac{i}{2}) = 0$. Ja, $f(z) = \frac{z-i/2}{-i/2z-1}$ (siehe Automorphismen auf $B(0,1)$) beim Riemannschen Abbildungssatz).
- $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(\sin z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Nein, nach Gebietstreue ist das Bild von sin nicht-leer und offen, f wäre also 0 auf einer offenen Menge und deswegen nach dem Identitätssatz überall 0.
- $f : \{z \in \mathbb{C} : |z| > 2\} \to \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z > 0\}$. Ja, zum Beispiel $f(z) = \frac{1}{z} + 42$.
- $\mathbb{C} \to B(0,1)$. Nein, nach Liouville wäre diese Abbildung beschränkt.
- $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$. Ja, $z \mapsto 1/z$.
- $\mathbb{C} \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Ja, zum Beispiel e^z.
- $\mathbb{C}\backslash\{0\} \to B(0,1)$. Nein, jede solche analytische Abbildung wäre beschränkt, deshalb könnte man die Singularität bei 0 heben und die Abbildung fortsetzen auf $\mathbb{C} \to B(0,1)$, wodurch sie nach Liouville konstant wäre.
- $B(0,1) \to B(0,1)\backslash\{0\}$. Zum Beispiel $z \mapsto \frac{z+1}{2}$.
- $\mathbb{H} = \{z : \mathrm{Im}\, z > 0\} \to \{x + iy : x, y \in (-1,1)\}$. Zum Beispiel die Cayley-Transformation $z \mapsto \frac{z-i}{z+1}$, da $B(0,1) \subset \{x + iy : x, y \in (-1,1)\}$

Existieren analytische Funktionen mit $f : \{z : \mathrm{Re}\, z > 0\} \to \mathbb{C}$ und

- $f(1/n) = (-1)^n$. Ja, zum Beispiel $f(z) = \cos(\pi/z)$.
- $f(1 + 1/n) = (-1)^n$. Es kann keine stetige Funktion geben, denn $f(1 + \frac{1}{2n}) = 1$ und $f(1 + \frac{1}{2n+1}) = -1$, aber $1 + \frac{1}{2n}, 1 + \frac{1}{2n+1} \to 1$, was innerhalb des Definitionsbereichs liegt.
- $f(1 + 1/n) = \frac{n}{n-1}$. Nein, denn f stimmt in $1 + 1/n$ mit $g(z) = \frac{1}{2-z}$ überein, nach Identitätssatz also $f = g$, da Folge einen Häufungspunkt bei 1 hat. Widerspruch, da sich Punkt 2 nicht analytisch fortsetzen lässt.
- $f^{(n)}(1) = (n!)^2$. Nein, nach der Taylorentwicklung hätte diese Potenzreihe Konvergenzradius 0.

Existieren Funktionen mit den folgenden Nullstellenmengen N

- $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $N = \emptyset$. Ja, exp.
- $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $N = \partial B(0,1)$. Nein, $\mathbb{C}$ hat Häufungspunkt in $\partial B(0,1)$, nach Identitätssatz wäre Funktion überall Null.
- $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $N = \{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. Ja, $f(z) = \sin(\pi/(1-z))$.

Existieren biholomorphe Abbildungen mit den folgenden Eigenschaften?

- $f : \mathbb{C}\backslash\{z : \mathrm{Re}\, z = 0\} \to \mathbb{C}\backslash\{z : \mathrm{Re}\, z = \mathrm{Im}\, z\}$. Ja, zum Beispiel $z \mapsto (1-i)z$.
- $f : \{z = x + iy \in \mathbb{C} : x^2 + 4y^2 < 1\} \to \mathbb{H}$. Ja, Innere eine Ellipse, deswegen konvex und danach einfach zusammenhängend. Riemannscher Abbildungssatz, da $\mathbb{H}$ auch konvex.
- $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to B(0,1)\backslash\{0\}$. Nein, diese analytische Funktion wäre beschränkt, damit hebbare Singularität bei 0 und setzt sich deswegen zu ganzer beschränkten Funktion fort, deswegen ist sie konstant und insbesondere nicht biholomorph.
- $f : B(0,1)\backslash[0,1) \to \{z : \mathrm{Re}\, z < 0, 0 < \mathrm{Im}\, z 1\}$. Ja, zum Beispiel $f(z) = \frac{\log z}{2\pi}$.
- $f : \mathbb{C}\backslash B(0,1) \to \{z : 0 < \mathrm{Im}\, z\}$. Nein, $\mathbb{C}\backslash B(0,1)$ ist nicht einfach zusammenhängend.
- $f : B(0,1) \to B(0,1)$ mit $f(0) = 0$ und $f(-i/2) = \frac{i+1}{2}$. Nein, f erfüllt Voraussetzungen vom Schwarzschem Lemma, es muss also gelten $|f(z)| \le |z|$, was hier nicht erfüllt ist.
- $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_{\le 0}$. $C\backslash\mathbb{R}_{\le 0}$ ist biholomoroph zu $B(0,1)$ nach Riemann, nach Liouville gibt es keine Abbildung $\mathbb{C} \to B(0,1)$.

Anwendung Schwarz Lemma für Funktion $f : D \to D$. Baue Diffeomorphismus von $\phi : D \to B(0,1)$ und definiere $g = \phi \circ f \circ \phi^{-1} : B(0,1) \to B(0,1)$. Checke, ob $g(0) = 0$, sonst muss ϕ so gewählt werden, dass für $z_0 \in D$ gilt $\phi_1(f(z_0)) = 0$ und $\phi_2^{-1}(0) = z_0$, sodass $g = \phi_1 \circ f \circ \phi_2^{-1}$. Dann gilt $|g| < |z|$, also $|\phi_1(f(z))| < |\phi_2(z)|$.

A.4 Nullstellen und Pole

Gleichungssystem $z^n = re^{it}$ hat Lösungen $z_k = r^{1/n} \exp\left(i\frac{t+2\pi k}{n}\right)$

Kubische Gleichungen der Form $az^4 + bz^2 + c$ können gelöst werden über:

(i) quadratische Gleichung lösen $z'_{1,2} = \frac{-b/2 \pm \sqrt{(b/2)^2 - ac}}{a}$

(ii) Gleichungssystem $z^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy) = z'_{1,2}$ lösen mit Lösungen z_1, z_2.

(iii) Lösungen der kubischen Gleichung sind $\pm z_1, \pm z_2$.

A.5 Vertauschungssätze

Es wird vorrausgesetzt, dass alle Grenzwerte und Ableitungen existieren, Funktionen integrierbar sind und die zu integrierende Gebiet schön sind.

$\sum_n \lvert\partial_x f_n(x)\rvert < \infty$	$\Rightarrow$	$\partial_x \sum_n f_n(x) = \sum_n \partial_x f_n(x)$
$\lim_{n\to\infty} f_n = f$ glm.	$\Rightarrow$	$\int \sum_n f_n(x) = \sum_n \int f_n(x)$
$\lim_{n\to\infty} f_n = f$ glm.	$\Rightarrow$	$\lim_{n\to\infty} \int f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x$
$\partial_t f(x,t)$ glm. stetig	$\Rightarrow$	$\partial_t \int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \partial_t f(x,t)\,\mathrm{d}x$
$0 \le f_n \le f_{n+1}, \int f_n(x)\,\mathrm{d}x \le c$	$\Rightarrow$	$\lim_{n\to\infty} \int f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x$
$\exists g \in L^1 :\ \lvert f_n(t,x)\rvert < g(x)$	$\Rightarrow$	$\lim_{n\to\infty} \int f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x$
$\exists g \in L^1 :\ \lvert\partial_t f(t,x)\rvert < g(x)$	$\Rightarrow$	$\partial_t \int f(t,x)\,\mathrm{d}x = \int \partial_t f(t,x)\,\mathrm{d}x$
$f \in C_0, \mathscr{S}$	$\Rightarrow$	$\partial_t \int f(t,x)\,\mathrm{d}x = \int \partial_t f(t,x)\,\mathrm{d}x$
$\int_F \left(\int_E \lvert f(x,y)\rvert\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y < \infty$	$\Rightarrow$	$\int_F \left(\int_E f\ \mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_E \left(\int_F f\ \mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$

A.6 Trigonometrie

$$\sin(ax) = \begin{Bmatrix} |\cdot| \max & ax = (2n+1)\frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & ax = (2n+0)\frac{\pi}{2} = n\pi & |\cdot| \max \end{Bmatrix} = \cos(ax)$$

$\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$, $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, $\quad \sinh x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$, $\cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$

$A\cos x + B\sin x = \frac{A-iB}{2}e^{ix} + \frac{A+iB}{2}e^{-ix}$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \sin x + \cos x = \frac{1}{1+i}e^{ix} + \frac{1}{1-i}e^{-ix} \qquad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y), \quad \sin 2x = 2\sin x\cos x$

$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y), \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\sin x \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y)), \qquad \sin^2(x) = \frac{1}{2}(1-\cos(2x))$

$\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y)), \qquad \cos^2(x) = \frac{1}{2}(1+\cos(2x))$

$\sin x \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y)), \qquad \sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin(2x)$

$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad \tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\tan y}, \qquad \langle x,y\rangle = \cos(\gamma)|x||y|$

$$\begin{array}{llll}
e^0 = +1 & e^{\frac{i\pi}{3}} = \frac{+1+\sqrt{3}i}{2} & e^{\frac{i\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(+1+i) & e^{\frac{i\pi}{6}} = \frac{+\sqrt{3}+i}{2} \\
e^{\frac{i\pi}{2}} = +i & e^{\frac{2i\pi}{3}} = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} & e^{\frac{3i\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i) & e^{\frac{5i\pi}{6}} = \frac{-\sqrt{3}+i}{2} \\
e^{i\pi} = -1 & e^{\frac{4i\pi}{3}} = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} & e^{\frac{5i\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i) & e^{\frac{7i\pi}{6}} = \frac{-\sqrt{3}-i}{2} \\
e^{\frac{3i\pi}{2}} = -i & e^{\frac{5i\pi}{3}} = \frac{+1-\sqrt{3}i}{2} & e^{\frac{7i\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(+1-i) & e^{\frac{11i\pi}{6}} = \frac{+\sqrt{3}-i}{2}
\end{array}$$

A.7 Ungleichungen, Abschätzungen und other

$|\langle u,v\rangle| \le \|u\|\|v\|,\ 2|ab| \le |a|^2 + |b|^2,\ ||x|-|y|| \le |x \pm y| \le |x| + |y|$

$|\int_E f(x)\,\mathrm{d}x| \le \int_E |f(x)|\,\mathrm{d}x, \quad (1+x)^n \ge 1 + nx,\ x \ge -1,\ n \in \mathbb{N}$

$\int_{B(z_0,R)} |\frac{1}{z^4+1}|\,\mathrm{d}z \le \int_{B(z_0,R)} \frac{1}{R^4-1}\,\mathrm{d}z$ für $R > 1$

$\left|\frac{f(z)-f(a)}{z-a}\right| < |f'(a)| + 1$

$\sum_{k=0}^n |a_k||z|^k \le (1+a_n)|z|^n$ für $|z|$ gross genug

Faktorisierung $ax^2 + bx = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a}$

$\mathscr{S}$, C_0^0 (und somit auch C_0, C^∞, $C^n\ \forall n$, C^0) sind dicht in L^p.

A.8 Integrale und Reihen

$\sum_{k=0}^n q^k = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & q \ne 1 \\ n+1 & q = 1 \end{cases}, \quad \sum_{k=0}^\infty q^k = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & |q| < 1 \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}, \quad \prod_{k=0}^{n}(2k+1) = \frac{(2k)!}{2^k k!}$

$e^x = \sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{n!}, \quad \log(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n, \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^\infty x^n\ |x| < 1$

$\sin x = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \ldots$

$\cos x = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \ldots$

$$\int \sin(nx)\cos(mx)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} -\dfrac{\cos((n+m)x)}{2(n+m)} - \dfrac{\cos((n-m)x)}{2(n-m)} + C & n \ne \pm m \\ -\dfrac{1}{4n}\cos(2nx) + C & n = m \end{cases}$$

$$\int \sin(nx)\sin(mx)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{\sin((n-m)x)}{2(n-m)} - \dfrac{\sin((n+m)x)}{2(n+m)} + C & n \ne \pm m \\ \pm\frac{x}{2} \mp \frac{1}{3n}\sin(2nx) + C & n = \pm m \end{cases}$$

$$\int \cos(nx)\cos(mx)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{\sin((n+m)x)}{2(n+m)} + \dfrac{\sin((n-m)x)}{2(n-m)} + C & n \ne \pm m \\ \frac{x}{2} + \frac{1}{4n}\sin(2nx) + C & n = \pm m \end{cases}$$

$\int_a^{a+2\pi l/n} \sin(nx)\mathrm{D}x = \int_a^{a+(2l+1)\pi/n} \cos(nx)\mathrm{D}x = 0,\ a \in \mathbb{R},\ l \in \mathbb{N}$

$\int_0^{l\pi} \sin(nx)\cos(mx)\,\mathrm{d}x = C\delta_{nm},\ l \in \mathbb{N}$

$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cos(mx)\mathrm{D}x = \int_0^{2\pi} \sin(nx)\cos(mx)\mathrm{D}x = 0$

$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/a}\,\mathrm{d}x = \sqrt{a\pi} \quad \int_0^\infty e^{-x^2/a}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{a\pi}$

A.9 Koordinatensysteme

Polarkoordinaten $x = r\cos\phi, y = r\sin\phi, r = \sqrt{x^2+y^2}, \phi = \arctan(y/x)$ *für* $x > 0$, $0 \le r \le \infty$, $0 \le \phi < 2\pi$. $\triangle = \partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_\phi^2$.

Kugelkoordinaten $x = r\sin\theta\cos\phi$, $y = r\sin\theta\sin\phi$, $z = r\cos\theta$ $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\theta = \arccos\left(\frac{z}{r}\right)$, $\phi = \arg(x,y)$, $0 \le r \le \infty$, $0 \le \phi < 2\pi$, $0 \le \theta \le \pi$. $\mathrm{d}V = r^2\,\mathrm{d}r\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$. $\triangle = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\partial_\theta) + \frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\phi^2$

A.10 Analysis

Definition A.1 (Topologie) *Eine Menge heisst*

- ***offen***
- ***abgeschlossen***
- ***Zusammenhängend***

Definition A.2 (Dichtheit) *Gegeben sei ein metrischer Raum* (X,d). *Dann heisst die Menge* $M \subseteq X$ *dicht in* X, *wenn zu jedem* $x \in X$ *und jedem* $r > 0$ *ein Punkt* $y \in M$ *existiert, sodass* $y \in B_r(x)$.

Definition A.3 (Konvergenz) *Sei* $D \subset \mathbb{R}^n$ *offen,* $f : D \to \mathbb{R}$ *eine Funktion und* $(f_n)_n$ *eine Funktionenfolge mit* $f_n : D \to \mathbb{R}$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$. *Falls*

- $\forall x \in D\ lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ *ist* f_n *punktweise konvergent,*
- $lim_{n\to\infty} \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| = 0$ *ist* f_n *gleichmässig konvergent.*

Anders ausgedrückt gilt $(f_n)_n$ *gleichmässig konvergent* $\Leftrightarrow \forall\varepsilon\,\exists N \in \mathbb{N}\,\forall n \in \mathbb{N} : (n \ge N \implies (\forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon))$.

Theorem A.4 *Falls* $(f_n)_n$ *eine Folge stetiger Funktionen gleichmässig gegen* f *konvergiert, dann ist* f *stetig.*

Theorem A.5 (Mittelwertsatz) *Sei* $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *diffb. Falls* $x_0 + th \in U\ \forall t \in [0,1]$ *und ein* $h \in \mathbb{R}^n$, *dann existiert ein* $t_\xi \in (0,1)$, *sodass* $f(x_0+h) - f(x_0) = \partial_h f(x_0 + t_\xi h)$. *Für* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, *diffbar auf* (a,b), *existiert ein* $\xi \in (a,b)$, *sodass* $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.