

ETH Aufnahmeprüfung - Schriftliche Prüfung Mathematik II

Melis, Daniel, Tim, Katja, Stuti, F, ...

AP 2026

Kurzes Vorwort

Heyy!! Falls ihr gerade zum ersten Mal über eines unserer Dokumente stolpert: Ich bin Melis und habe nach der ETH-Aufnahmeprüfung gemeinsam mit anderen Prüfungsteilnehmenden unsere Erfahrungen, Erinnerungen und Prüfungsfragen gesammelt und daraus diese vierteilige Dokumentenreihe zusammengestellt, um zukünftigen Prüfungsteilnehmenden die Vorbereitung etwas zu erleichtern. Dieses Dokument enthält den Teil zu Mathematik Teil 2 und basiert auf den Aufgaben, an die wir uns nach der Prüfung noch erinnern konnten. Für allgemeine Informationen zur Aufnahmeprüfung sowie Tipps, Ressourcen und weitere Hinweise zur Vorbereitung schaut am besten auch in unser Dokument zu den mündlichen Prüfungen. Vergesst natürlich auch nicht, euch die übrigen Dokumente der Reihe anzuschauen! Schon jetzt ganz viel Erfolg bei der Prüfung :D

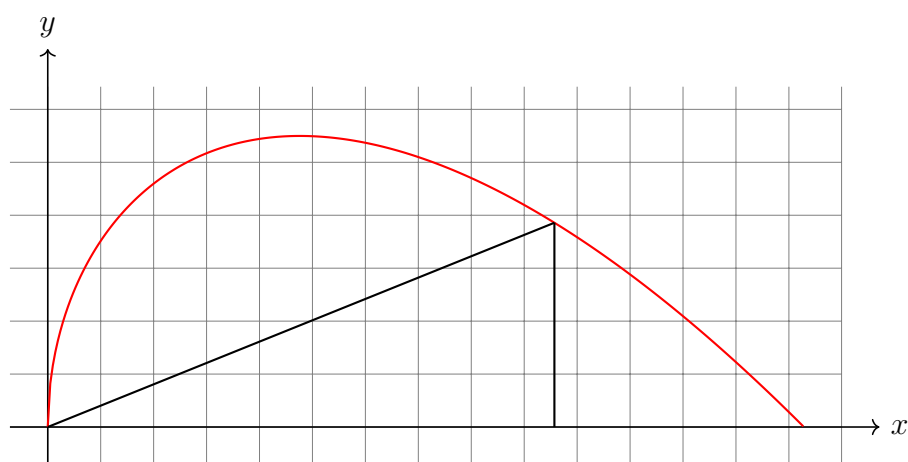
Die Aufgaben in diesem Dokument wurden möglichst prüfungsnah gestaltet, sodass dieses Dokument direkt als Probeprüfung verwendet werden kann. Die am Ende des Dokuments aufgeführten Lösungen dienen lediglich als Orientierung und sind möglicherweise nicht in allen Punkten zu 100% korrekt, da sowohl die Aufgaben als auch die Lösungen auf unseren Erinnerungen an die Prüfung basieren :)

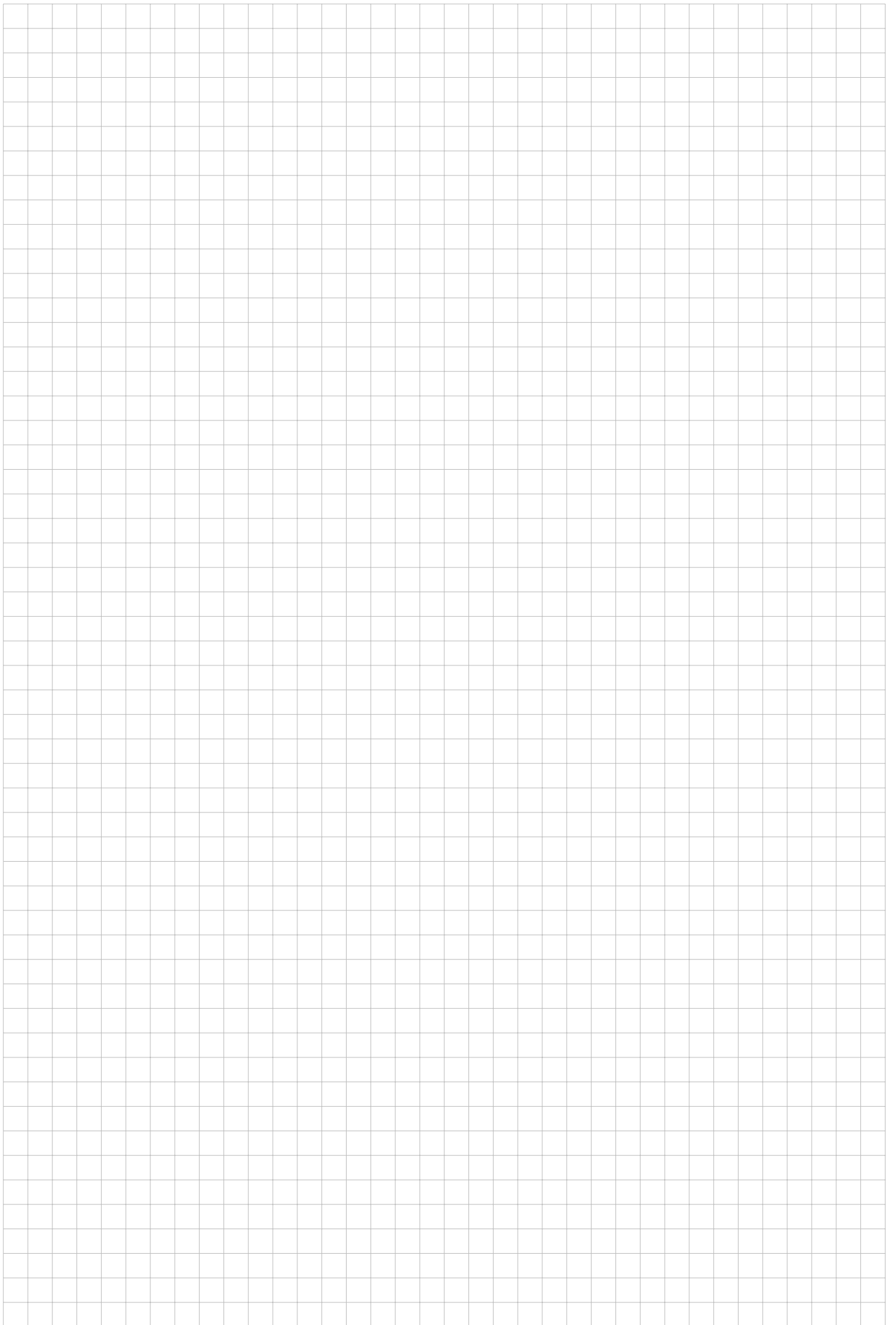
Die Reihenfolge der Aufgaben kann natürlich abweichen. Bei Aufgaben, deren exakte Zahlenwerte wir nicht mehr vollständig rekonstruieren konnten, haben wir fehlende bzw. nicht mehr bekannte Werte so ergänzt, dass Lösungsweg, Methodik und Fragestellung möglichst unverändert bleiben. Der Lösungsschlüssel wurde entsprechend angepasst.

Während der Prüfung wurden bei zwei Aufgaben kleinere Fehler in der Aufgabenstellung festgestellt und noch während der Bearbeitungszeit korrigiert. Aus diesem Grund wurde die Prüfungszeit insgesamt um 15 Minuten verlängert. Genauere Hinweise dazu findet ihr direkt bei den jeweiligen Aufgaben.

Hinweis: Diese Dokumentenreihe ist ein privates, von Prüfungsteilnehmenden erstelltes Projekt und steht in keiner offiziellen Verbindung zur ETH Zürich. Die Inhalte wurden weder von der ETH Zürich erstellt noch überprüft oder bestätigt. Alle Angaben, Prüfungsfragen, Erfahrungen, Tipps und Ressourcen basieren auf persönlichen Erinnerungen und Berichten und können daher unvollständig oder ungenau sein. Für verbindliche Informationen zu Prüfungsstoff, Ablauf, Reglementen und Anforderungen gelten ausschließlich die offiziellen Angaben der ETH Zürich.

1. Gegeben ist die Funktion $f(x) = (1-x)\sqrt{x}$. Der Graph dieser Funktion beschreibt eine tropfenförmige Fläche. Vom Ursprung wird eine Gerade zu einem beliebigen Punkt des Tropfens gezogen. Zusammen mit dem Lot dieses Punktes auf die x -Achse entsteht eine dreieckige Fläche. Die auf der x -Achse verbleibende Länge dieses Dreiecks wird mit h bezeichnet.
- Bestimmen Sie den Maximalpunkt des Tropfens.
 - Bestimmen Sie den Flächeninhalt, der von dem Graphen von f und der x -Achse eingeschlossen ist.
 - Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers, der entsteht, wenn der Tropfen um die x -Achse rotiert.
 - Nun wird das beschriebene Dreieck um die x -Achse rotiert, sodass ein Kegel entsteht. Bestimmen Sie den Wert von h , für den das Volumen dieses Kegels maximal ist, und geben Sie das maximale Volumen an.



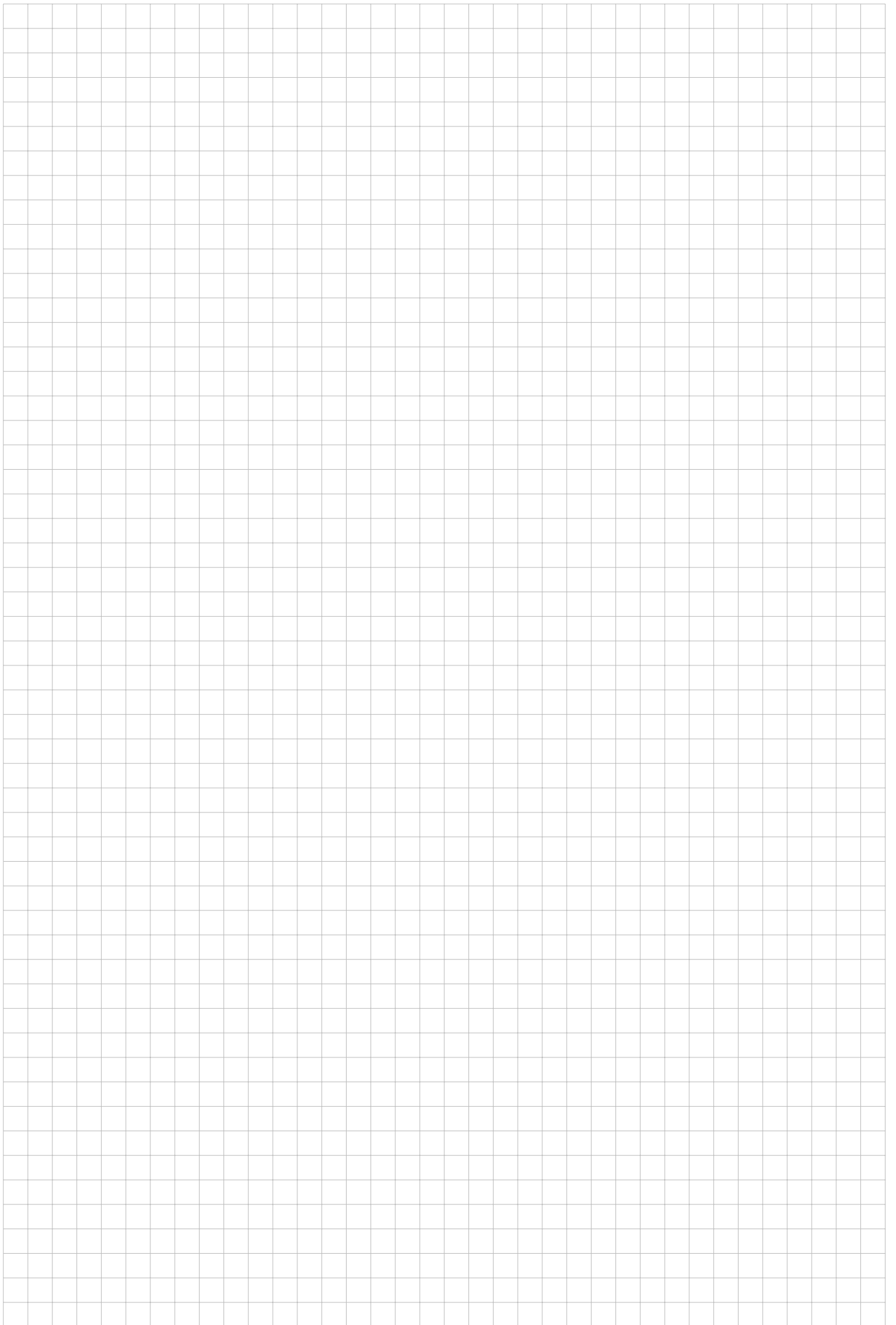


2. Ein spezieller Würfel ist wie folgt gestaltet:

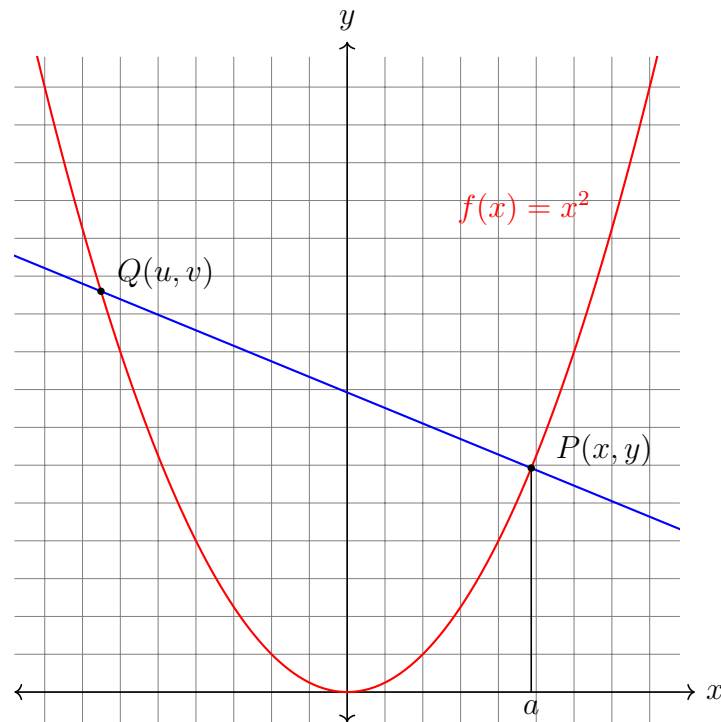
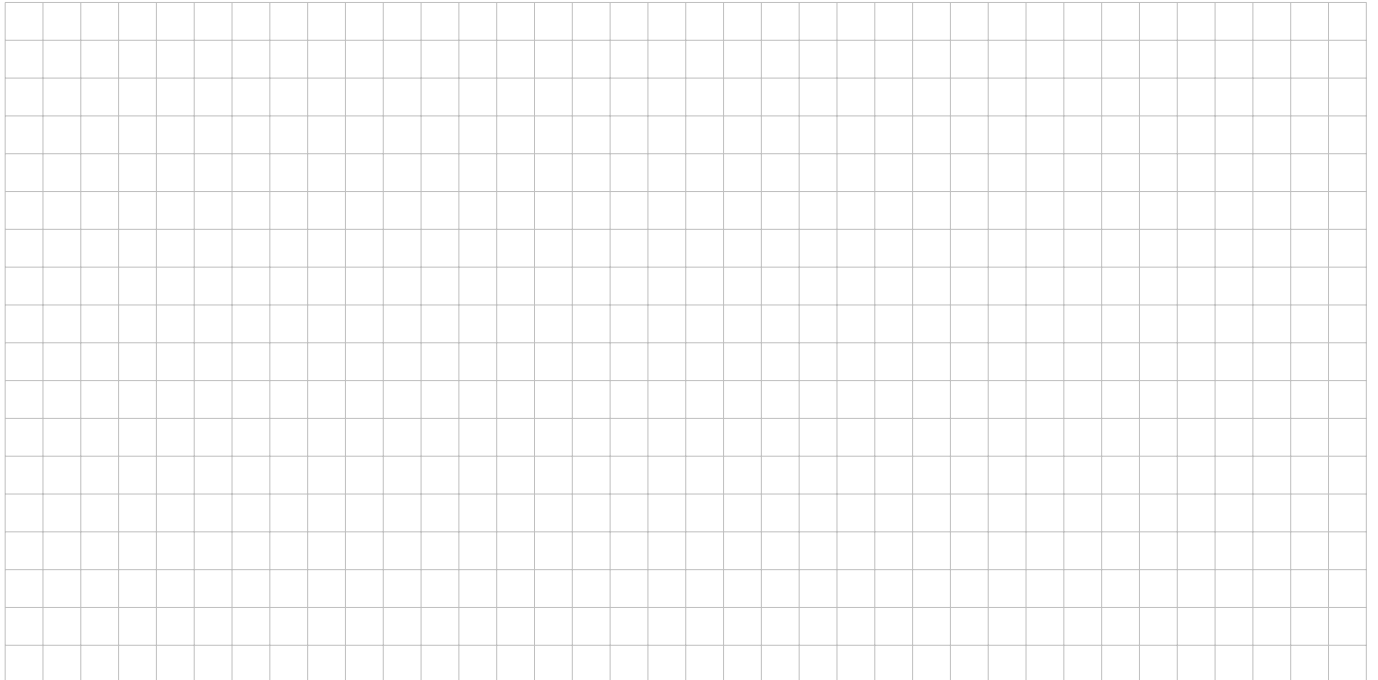
Auf einer seiner Seiten ist ein Auge, auf zwei verschiedenen Seiten sind jeweils zwei Augen und auf den verbleibenden drei Seiten sind jeweils drei Augen abgebildet.

- (a) Stellen Sie die Wahrscheinlichkeiten von jedes Ereignis tabellenartig dar
- (b) Jetzt wird diese Würfel fünfmal geworfen:
 - i. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau einmal die Augenzahl 1 erscheint.
 - ii. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass höchstens dreimal die Augenzahl 3 erscheint.
 - iii. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Summe der Augenzahlen mindestens 14 beträgt.
- (c) Fabian und Nicole spielen mit dem Würfel ein Spiel. Die Spieler würfeln abwechselnd. Wenn ein Spieler bzw. eine Spielerin eine Eins würfelt, gewinnt er/sie. Andernfalls würfelt der andere Spieler weiter. Das Spiel dauert, bis jemand gewinnt. Wie groß ist Fabians Gewinnwahrscheinlichkeit, wenn Nicole das Spiel beginnt?
- (d) Sie spielen ein Spiel, bei dem der Einsatz 2.50 CHF beträgt. In jedem Spiel werden die Würfel zweimal geworfen. Erscheint zweimal dieselbe Augenzahl, so erhalten Sie den Betrag der Summe der beiden Augenzahlen ausbezahlt. Erscheinen zwei verschiedene Augenzahlen, so erhalten Sie den kleineren der beiden Werte ausbezahlt. Bestimmen Sie, wie viel Geld eine Person im Durchschnitt bei diesem Spiel erhält.¹

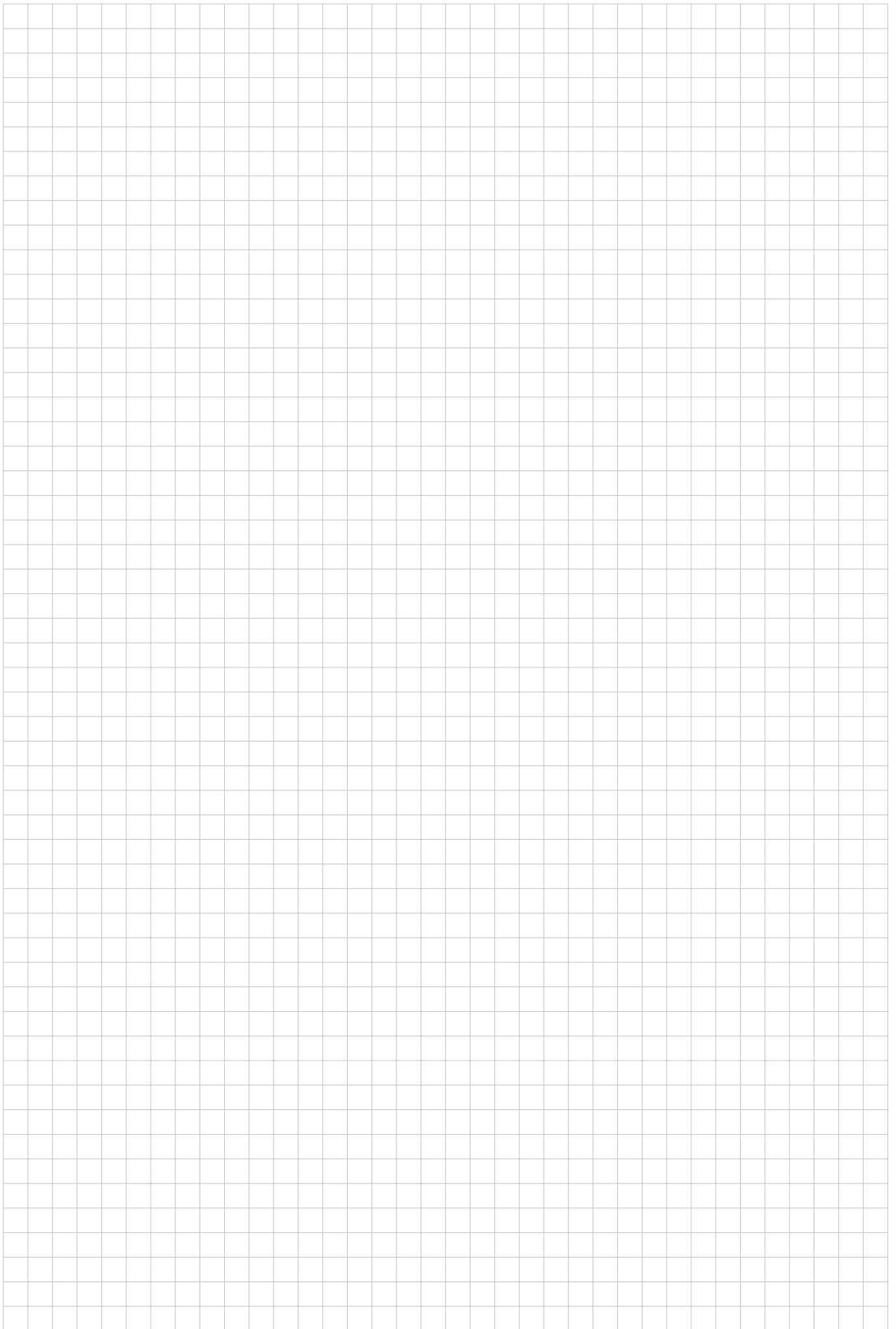
¹Als uns die Aufgabe vorgelegt wurde, stand ursprünglich die Formulierung “als Gewinn ausbezahlt” in der Aufgabenstellung. Im Verlauf der Prüfung wurde der Teil “als Gewinn” gestrichen, sodass nur noch “ausbezahlt” übrig blieb. Aufgrund dieses Punktes sowie eines weiteren kleinen Fehlers wurde die Prüfungszeit insgesamt um 15 Minuten verlängert.



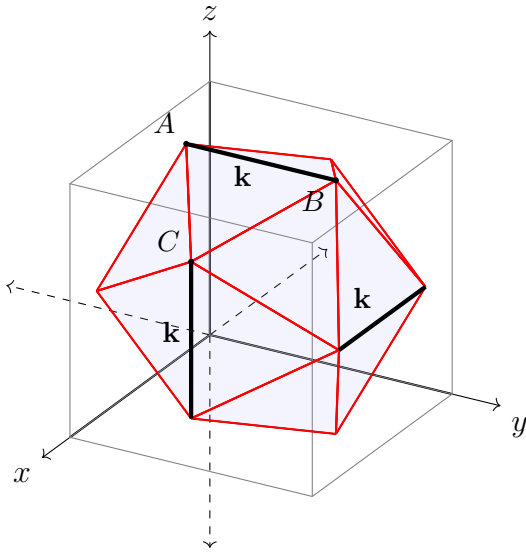
3. Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2$. Ein Punkt $P(x, y)$ liegt auf dem Graphen dieser Funktion mit $a > 0$. Durch den Punkt P wird die Normale an den Graphen von f gelegt. Diese Normale schneidet die y -Achse im II. Quadranten² in einem Punkt $Q(u, v)$. Bestimmen Sie den Wert von a , für den die y -Koordinate des Punktes Q minimal ist, und berechnen Sie anschließend die Koordinaten von Q .



²In der Aufgabenstellung war ursprünglich der vierte Quadrant angegeben, obwohl tatsächlich der zweite Quadrant gemeint war. Da aus der Abbildung eindeutig hervorging, in welchem Quadranten der Schnittpunkt liegt, und da die Normale an den Graphen von x^2 diesen Graphen im vierten Quadranten ohnehin nicht schneiden kann, stellte dies keinen gravierenden Fehler dar. Dennoch wurde aufgrund dieses Fehlers sowie eines weiteren Fehlers in Aufgabe 2 die Prüfungszeit insgesamt um 15 Minuten verlängert.



4. Ein Ikosaeder ist ein regulärer Körper mit 20 kongruenten Flächen. In dieser Aufgabe ist ein Ikosaeder mittig in einen Einheitswürfel eingebettet. Alle Kanten des Ikosaeders haben die Länge k . Die im Bild fett dargestellten Kanten berühren die Flächen des Einheitswürfels.



- (a) Drücken Sie die Koordinaten der Punkte A , B und C durch k aus.

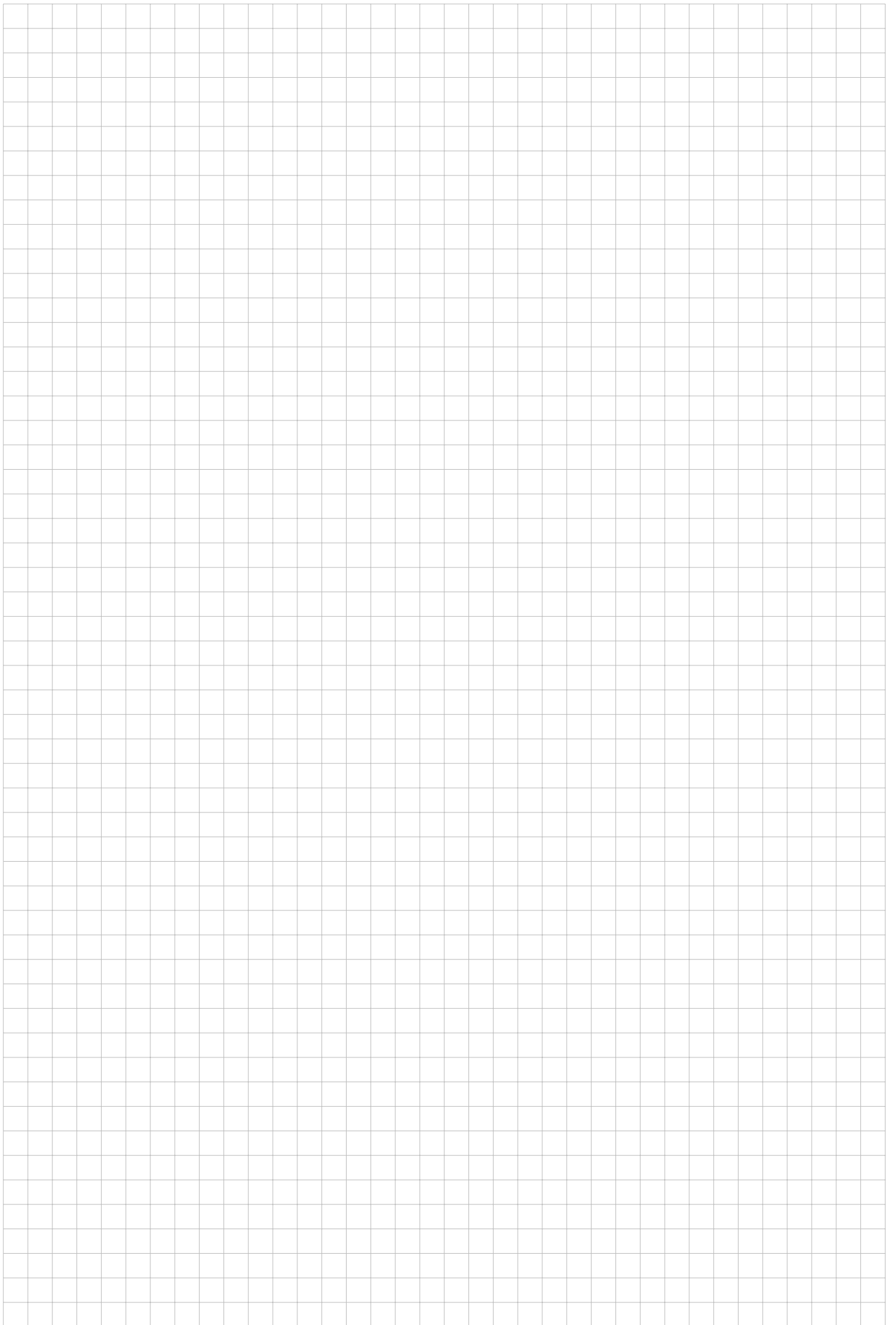
- (b) Bestimmen Sie den Wert von k .

Falls dies nicht gelingt, rechnen Sie in den folgenden Teilaufgaben mit $k = 0.6$ weiter.

- (c) Bestimmen Sie das Verhältnis des Volumens des Ikosaeders zum Volumen des Einheitswürfels und geben Sie dieses anschließend in Prozent an.

Hinweis: Das Ikosaeder kann in 20 kongruente Tetraeder zerlegt werden





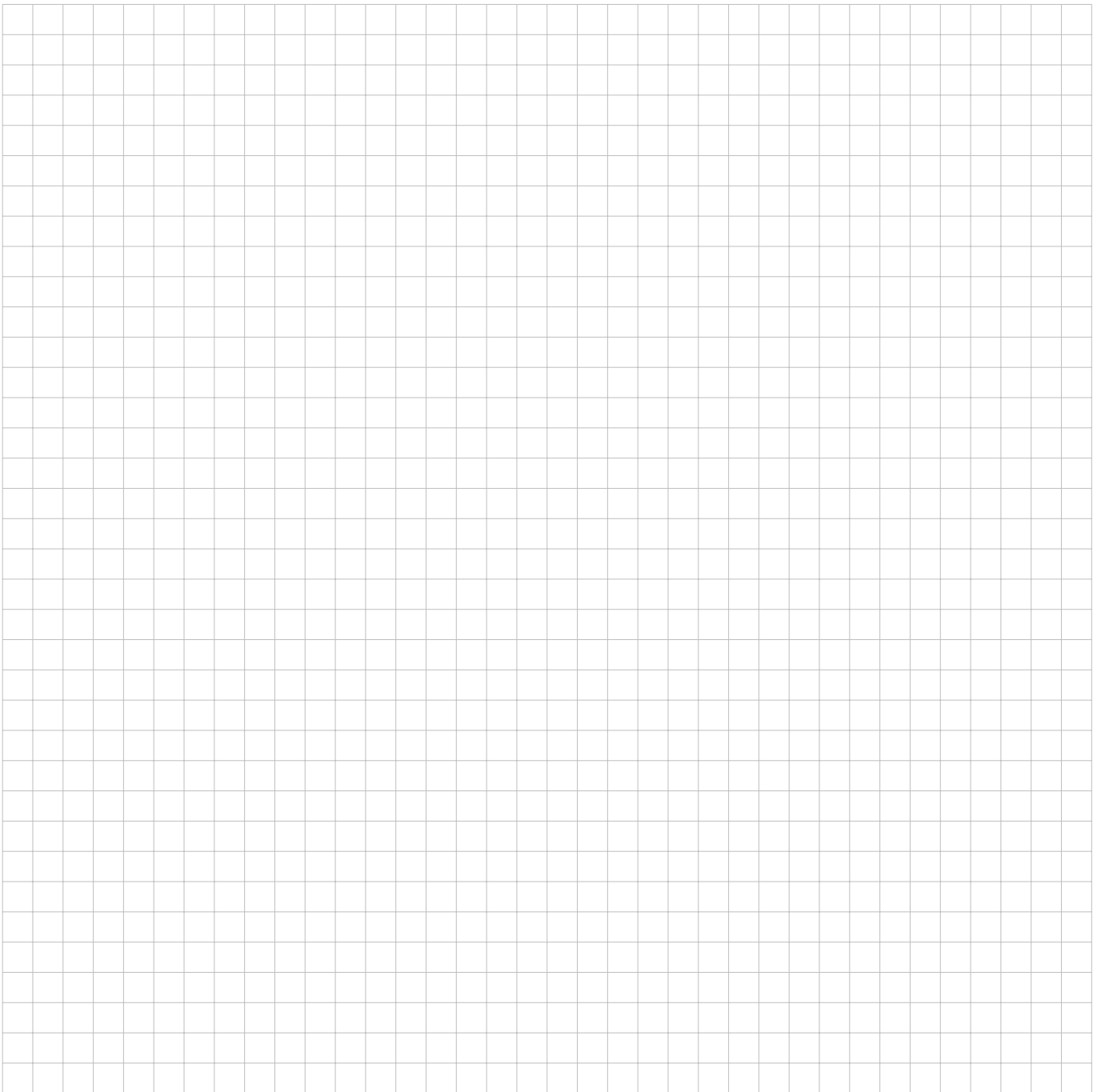
5. Gegeben ist eine Zahlenfolge mit der Definition:

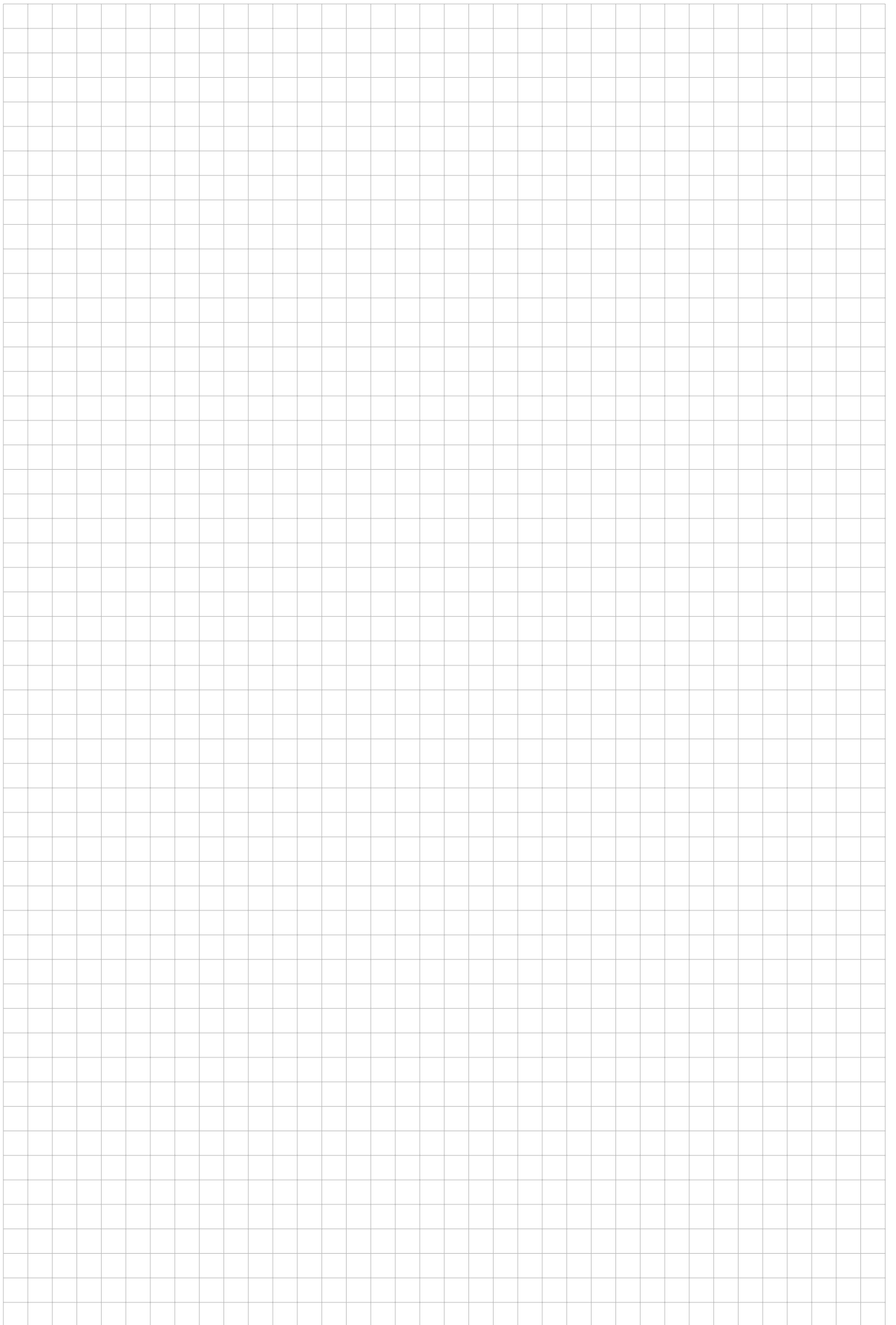
$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{k+1} = a_k + \frac{(k+1)(k+2) - 1}{(k+1)(k+2)}$$

- (a) Berechnen Sie die Folgenglieder a_2 , a_3 und a_4
- (b) Untersuchen Sie anschließend die Zahlenfolge und stellen Sie eine Vermutung für eine mögliche explizite Darstellung der Folge auf

Hinweis: Falls Ihnen dabei nichts auffällt, kann die Berechnung von a_5 hilfreich sein

- (c) Beweisen Sie die in Teilaufgabe (b) gefundene Vermutung mittels vollständiger Induktion





Lösungen

1.

(a) Maximum Punkt = (x_m, y_m)

$$f'(x) = (-1) \cdot \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (1-x)$$

$$f'(x) = -\sqrt{x} + \frac{1-x}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x_m) = 0 \rightarrow -\sqrt{x_m} + \frac{1-x_m}{2\sqrt{x_m}} = 0$$

$$0 = \frac{-2x_m + 1 - x_m}{2\sqrt{x_m}}$$

$$0 = -2x_m + 1 - x_m = -3x_m + 1$$

$$x_m = \frac{1}{3}$$

$$f(x_m) = y_m$$

$$y_m = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$y_m = \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

(b)

$$f(x) = 0 \rightarrow (1-x)\sqrt{x} = 0 \rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = 1$$

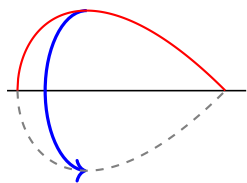
$$A = \int_0^1 (1-x)\sqrt{x} \, dx = \int_0^1 \sqrt{x} - x\sqrt{x} \, dx = \int_0^1 x^{1/2} - x^{3/2} \, dx$$

$$= \left[\frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^{5/2}}{5/2} \right]_0^1$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$$

(c)

$$V = \pi \int_0^1 (f(x))^2 dx = \pi \int_0^1 x(1-x)^2 dx = \pi \int_0^1 x^3 - 2x^2 + x dx$$



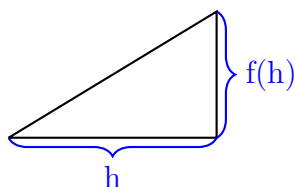
$$= \pi \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_0^1$$

$$= \pi \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 0 \right)$$

$$= \pi \frac{3 - 8 + 6}{12}$$

$$= \frac{\pi}{12}$$

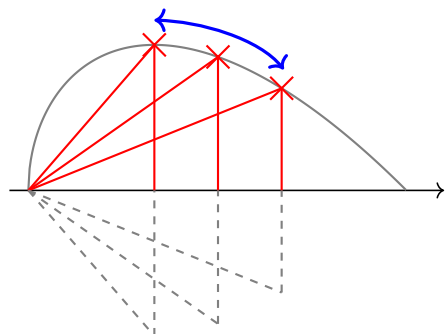
(d)



$$V(h) = \frac{1}{3} Gh \rightarrow \frac{1}{3} \pi (f(h))^2 \cdot h$$

$$V(h) = \frac{1}{3} \pi (h^3 - 2h^2 + h) \cdot h$$

$$V(h) = \frac{1}{3} \pi (h^4 - 2h^3 + h^2)$$



$$V_{max} \rightarrow V'(h) = 0 \rightarrow \frac{1}{3} \pi (4h^3 - 6h^2 + 2h) = 0$$

$$h(2h^2 - 3h + 1) = 0$$

$$h(2h - 1)(h - 1) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} h \neq 0 \\ h \neq \frac{1}{2} \end{array} \right\} \text{Randf\u00e4lle}$$

$$\underline{\underline{h = \frac{1}{2}}}$$

$$V_{max} = V\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} \pi \left(\left(\frac{1}{2}\right)^4 - 2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right)$$

$$= \frac{1}{3} \pi \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right)$$

$$= \frac{\pi}{48}$$

2. (a)

Augenzahl	1	2	3
p	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$

- (b) i. Die Position der 1 ist nicht festgelegt. Es gibt $\binom{5}{1} = 5$ Möglichkeiten, die eine 1 zu platzieren.

$$P(X = 1) = \binom{5}{1} \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^4$$

$$P(X = 1) = 5 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{625}{1296}$$

$$P(X = 1) = \frac{3125}{7776} = 0,4018775... \approx \underline{0,402}$$

- ii. Gesucht ist $P(X \leq 3)$. Die Zufallsvariable X ist diskret, daher gilt:

$$P(X \leq 3) = 1 - P(X = 4) - P(X = 5)$$

Aus der Tabelle aus Teil a erkennt man, dass die Wahrscheinlichkeit p für die Augenzahl 3 gleich $p = \frac{1}{2}$ ist.

$$P(X = 4) = \binom{5}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{32}$$

$$P(X = 5) = \binom{5}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$$

Also:

$$P(X \leq 3) = 1 - \frac{5}{32} - \frac{1}{32}$$

$$P(X \leq 3) = \frac{13}{16} = 0,8125 \approx \underline{0,813}$$

- iii. Bei fünf Würfeln ist die maximale Summe $5 \cdot 3 = 15$. Mindestens 14 bedeutet also nur zwei mögliche Fälle: 14 oder 15

Fall 1 - Summe 15:

Das geht nur mit (3,3,3,3,3)

$$P = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$$

Fall 2 - Summe 14:

Das geht nur mit viermal 3 und einmal 2 wie (3,3,3,3,2), aber die 2 kann an 5 verschiedenen Positionen stehen:

$$P = \binom{5}{1} \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$P = 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{16} = \frac{5}{48}$$

Zusammen:

$$P = \frac{1}{32} + \frac{5}{48} = \frac{13}{96} = 0,1354166... \approx \underline{0,135}$$

(c) Für jeden Wurf gilt:

$$P(1) = \frac{1}{6} \quad P(\text{keine } 1) = \frac{5}{6}$$

Nicole beginnt. Fabian gewinnt, wenn Nicole zuerst keine 1 würfelt und Fabian danach eine 1 würfelt. Direkt in der ersten Runde:

$$\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$$

Falls beide keine 1 würfeln, beginnt die Situation wieder von vorne. Die Wahrscheinlichkeit, dass beide keine 1 würfeln, ist:

$$\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$$

So entsteht eine geometrische Reihe:

$$P(F) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{25}{36}\right) \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{25}{36}\right)^2 \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \dots$$

$$P(F) = \frac{5}{36} \left(1 + \left(\frac{25}{36}\right) + \left(\frac{25}{36}\right)^2 + \dots \right)$$

$$\underline{S_\infty} = \frac{1}{1-q} \Rightarrow \frac{1}{1-\frac{25}{36}}$$

$$P(F) = \frac{5}{36} \cdot \frac{1}{1-\frac{25}{36}}$$

$$P(F) = \frac{5}{36} \cdot \frac{36}{11} = \frac{5}{11}$$

$$P(\text{Fabian gewinnt}) = \frac{5}{11} = 0,4545454... \approx \underline{0,455}$$

(d) Gesucht ist der Erwartungswert $E(X)$ des Spiels.

(1,1) $\Rightarrow$ 2 CHF

$$p = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

(2,2) $\Rightarrow$ 4 CHF

$$p = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{9}$$

(3,3) $\Rightarrow$ 6 CHF

$$p = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{4}$$

(1,2), (2,1), (1,3), (3,1) $\Rightarrow$ 1 CHF

$$p = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{18}$$

(2,3), (3,2) $\Rightarrow$ 2 CHF

$$p = \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Die Wahrscheinlichkeiten sind daher:

Auszahlung	1	2	4	6
p	$\frac{5}{18}$	$\frac{13}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{4}$

$E(X) = \text{Auszahlung} - \text{Einsatz}$

$$E(X) = 1 \cdot \frac{5}{18} + 2 \cdot \frac{13}{36} + 4 \cdot \frac{1}{9} + 6 \cdot \frac{1}{4} - 2,50$$

$$E(X) = \frac{5}{18} + \frac{26}{36} + \frac{4}{9} + \frac{6}{4} - 2,50$$

$$E(X) = \frac{4}{9} = 0,44444... \approx \underline{\underline{0,444 \text{ CHF}}}$$

3. Punkt P hat die Koordinaten $(a, f(a)) = (a, a^2)$

$$f(x) = x^2$$

$$f'(x) = 2x$$

$$f'(a) = 2a$$

$$m_t = 2a \quad \rightarrow \quad m_n = \frac{-1}{2a}$$

Gerade g durch Q und P:

$$g : y - a^2 = \frac{-1}{2a}(x - a)$$

$$g : y = \frac{-1}{2a}(x - a) + a^2$$

$$g : y = \frac{a - x + 2a^3}{2a}$$

Schnittpunkt von f(x) und g ist Q:

$$f(x) = g$$

$$x^2 = \frac{a - x + 2a^3}{2a}$$

$$2ax^2 = a - x + 2a^3$$

$$0 = 2ax^2 + x - 2a^3 - a$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 2a \cdot (-2a^3 - a)}}{4a}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 16a^4 + 8a^2}}{4a}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{(4a^2 + 1)^2}}{4a}$$

$$x = \frac{-1 \pm (4a^2 + 1)}{4a}$$

$$x_1 = u_1 = \frac{-1 + (4a^2 + 1)}{4a} = a$$

$$x_2 = u_2 = \frac{-1 - (4a^2 + 1)}{4a} = \frac{-2 - 4a^2}{4a} = \frac{-1 - 2a^2}{2a}$$

Da Q im II. Quadrant liegt, muss $u < 0$. Die x-Koordinate vom Punkt P ist gleich $a > 0$ (P liegt im I. Quadrant). Deshalb kann u nicht gleich u_1 sein.

Jetzt haben wir die x-Koordinate vom Punkt Q (also u) in Abhängigkeit von a gefunden. Wir können einfach die y-Koordinate (also v) in Abhängigkeit von a finden, weil Q auch auf $f(x)$ liegt.

$$f(u) = u^2 = v$$

$$v = \left(\frac{-1 - 2a^2}{2a} \right)^2$$

$$v = \frac{4a^4 + 4a^2 + 1}{4a^2}$$

Da wir den Extremwert von $v(a)$ bestimmen wollen, setzen wir die erste Ableitung gleich null

$$0 = \frac{dv}{da}$$

$$0 = \frac{(16a^3 + 8a) \cdot 4a^2 - (8a) \cdot (4a^4 + 4a^2 + 1)}{16a^4}$$

$$0 = \frac{64a^5 + 32a^3 - 32a^5 - 32a^3 - 8a}{16a^4}$$

$$0 = \frac{32a^5 - 8a}{16a^4}$$

$$0 = \frac{4a^4 - 1}{2a^3}$$

$$a^4 = \frac{1}{4}$$

$$a = \sqrt[4]{\frac{1}{4}}$$

Den gefundenen Wert von a setzen wir nun in $v(a)$ ein, um den zugehörigen Extremwert von v zu bestimmen

$$v = \frac{4a^4 + 4a^2 + 1}{4a^2}$$

$$v = \frac{4(\sqrt[4]{\frac{1}{4}})^4 + 4(\sqrt[4]{\frac{1}{4}})^2 + 1}{4(\sqrt[4]{\frac{1}{4}})^2}$$

$$v = \frac{4 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{2} + 1}{4 \cdot \frac{1}{2}}$$

$$v = 2$$

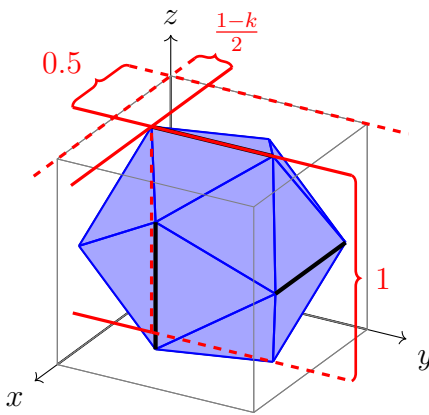
Da Q auf der Parabel $v = u^2$ liegt, können wir aus der bekannten y-Koordinate $v = 2$ die zugehörige x-Koordinate u bestimmen

$$\begin{aligned} v &= u^2 \\ u &= \sqrt{v} \\ u &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\underline{Q(\sqrt{2}, 2)}$$

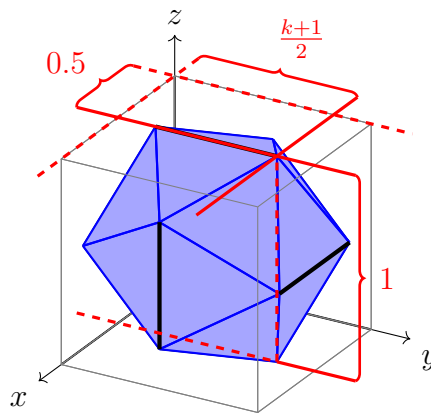
4.

(a)



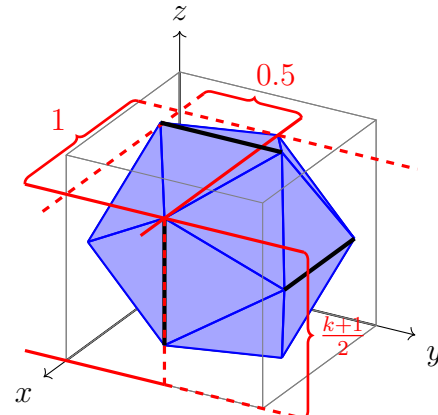
Koordinaten von A:

$$(0.5, \frac{1-k}{2}, 1)$$



Koordinaten von B:

$$(0.5, \frac{k+1}{2}, 1)$$



Koordinaten von C:

$$(1, 0.5, \frac{k+1}{2})$$

- (b) Da das Ikosaeder regelmäßig ist, sind alle Kanten gleich lang. Daher setzen wir die Länge einer Kante gleich k und bestimmen k durch Lösen der entsprechenden Gleichung.

Man wählt eine Kante so, dass ihr Verbindungsvektor sowohl von k als auch von konstanten Termen abhängt, um eine nicht-triviale Gleichung für k zu erhalten. Die Strecke AB eignet sich nicht zur Bestimmung von k , da sich lediglich die Identität $k=k$ ergibt. Daher betrachtet man eine andere Kante wie AC oder BC.

$$\vec{BC} = C - B = \left(1 - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1+k}{2}, \frac{1+k}{2} - 1\right)$$

$$\vec{BC} = \left(\frac{1}{2}, \frac{-k}{2}, \frac{k-1}{2}\right)$$

$$k = |\vec{BC}|$$

$$k = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-k}{2}\right)^2 + \left(\frac{k-1}{2}\right)^2}$$

$$k = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{k^2}{4} + \frac{(k-1)^2}{4}}$$

$$k^2 = \frac{1}{4} + \frac{k^2}{4} + \frac{k^2 - 2k + 1}{4}$$

$$k^2 = \frac{2k^2 - 2k + 2}{4}$$

$$2k^2 + 2k - 2 = 0$$

$$k^2 + k - 1 = 0$$

Mit der Mitternachtsformel:

$$k = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$k \neq -1,618033... \rightarrow$ Da k eine Länge ist, muss $k \geq 0$ gelten

$$k = 0,6180339... \approx \underline{0,618}$$

(c)

Aus Teil (b) wissen wir:

$$k = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

Für ein Ikosaeder gilt (laut Formelsammlung Seite 95):

$$\frac{V}{a^3} = \frac{5(3 + \sqrt{5})}{12}$$

Da hier die Kantenlänge des Ikosaeders $a = k$ ist, folgt:

$$V_{\text{Ikosaeder}} = \frac{5(3 + \sqrt{5})}{12} \cdot k^3$$

Nun setzen wir den in Teil (b) gefundenen Wert von k ein:

$$V_{\text{Ikosaeder}} = \frac{5(3 + \sqrt{5})}{12} \cdot \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right)^3$$

$$V_{\text{Ikosaeder}} = \frac{5(\sqrt{5} - 1)}{12}$$

Der Einheitswürfel hat das Volumen

$$V_{\text{Einheitswürfel}} = 1$$

Also ist das gesuchte Verhältnis:

$$\frac{V_{\text{Ikosaeder}}}{V_{\text{Würfel}}} = \frac{\frac{5(\sqrt{5}-1)}{12}}{1}$$

Als Prozentwert:

$$\frac{5(\sqrt{5} - 1)}{12} \cdot 100 = 51,5028 \dots \% \approx \underline{51,5\%}$$

5.

$$(a) \quad a_2 = \frac{4}{3}, \quad a_3 = \frac{9}{4}, \quad a_4 = \frac{16}{5}$$

Berechnung für a_2 als Beispiel:

$$a_2 = a_1 + \frac{(1+1)(1+2) - 1}{(1+1)(1+2)} = \frac{1}{2} + \frac{2 \cdot 3 - 1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} + \frac{5}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$(b) \quad a_n = \frac{n^2}{n+1}$$

$$(c) \quad \text{Induktionsanfang : } a_n = \frac{n^2}{n+1} \rightarrow a_1 = \frac{1^2}{1+1} = \frac{1}{2} \quad (\text{Siehe Aufgabenstellung})$$

Induktionsschritt :

- Voraussetzung : $a_n = \frac{n^2}{n+1}$

- Behauptung : $a_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)+1} = \frac{(n+1)^2}{n+2}$

- Beweis :

$$a_{n+1} = a_n + \frac{(n+1)(n+2) - 1}{(n+1)(n+2)}$$

$$a_{n+1} = \frac{n^2}{n+1} + \frac{(n+1)(n+2) - 1}{(n+1)(n+2)}$$

$$a_{n+1} = \frac{n^2 \cdot (n+2)}{(n+1)(n+2)} + \frac{(n+1)(n+2) - 1}{(n+1)(n+2)}$$

$$a_{n+1} = \frac{n^3 + 2n^2}{(n+1)(n+2)} + \frac{(n^2 + 3n + 2) - 1}{(n+1)(n+2)}$$

$$a_{n+1} = \frac{n^3 + 3n^2 + n^2 + 3n + 1}{(n+1)(n+2)}$$

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)(n^2 + 2n + 1)}{(n+1)(n+2)}$$

$$a_{n+1} = \frac{n^2 + 2n + 1}{n+2}$$

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{n+2}$$