

ETH Aufnahmeprüfung - Schriftliche Prüfung Mathematik I

Melis, Daniel, Tim, Katja, Stuti, F, ...

AP 2026

Kurzes Vorwort

Heyy!! Falls ihr gerade zum ersten Mal über eines unserer Dokumente stolpert: Ich bin Melis und habe nach der ETH-Aufnahmeprüfung gemeinsam mit anderen Prüfungsteilnehmenden unsere Erfahrungen, Erinnerungen und Prüfungsfragen gesammelt und daraus diese vierteilige Dokumentenreihe zusammengestellt, um zukünftigen Prüfungsteilnehmenden die Vorbereitung etwas zu erleichtern. Dieses Dokument enthält den Teil zu Mathematik Teil 1 und basiert auf den Aufgaben, an die wir uns nach der Prüfung noch erinnern konnten. Für allgemeine Informationen zur Aufnahmeprüfung sowie Tipps, Ressourcen und weitere Hinweise zur Vorbereitung schaut am besten auch in unser Dokument zu den mündlichen Prüfungen. Vergesst natürlich auch nicht, euch die übrigen Dokumente der Reihe anzuschauen! Schon jetzt ganz viel Erfolg bei der Prüfung :D

Die Aufgaben in diesem Dokument wurden möglichst prüfungsnah gestaltet, sodass dieses Dokument direkt als Probeprüfung verwendet werden kann. Die am Ende des Dokuments aufgeführten Lösungen dienen lediglich als Orientierung und sind möglicherweise nicht in allen Punkten zu 100% korrekt, da sowohl die Aufgaben als auch die Lösungen auf unseren Erinnerungen an die Prüfung basieren :)

Die Reihenfolge der Aufgaben kann natürlich abweichen. Bei Aufgaben, deren exakte Zahlenwerte wir nicht mehr vollständig rekonstruieren konnten, haben wir fehlende Komponenten so ergänzt, dass Lösungsweg, Methodik und Fragestellung identisch bleiben. Der Lösungsschlüssel wurde entsprechend angepasst.

In dieser Prüfung gab es ursprünglich zwei weitere Aufgaben, die wir leider nicht mehr vollständig rekonstruieren konnten. Daher könnt ihr euch eine etwas kürzere Bearbeitungszeit setzen (z. B. 60 Minuten für 10 Aufgaben $\rightarrow \approx 48$ min für 8 Aufgaben). Außerdem erinnern wir uns bei Aufgabe 6 nicht mehr exakt an alle Zahlenwerte der Vektoren und Punkte, und an den entsprechenden Stellen haben wir daher ähnliche Zahlenwerte eingesetzt.

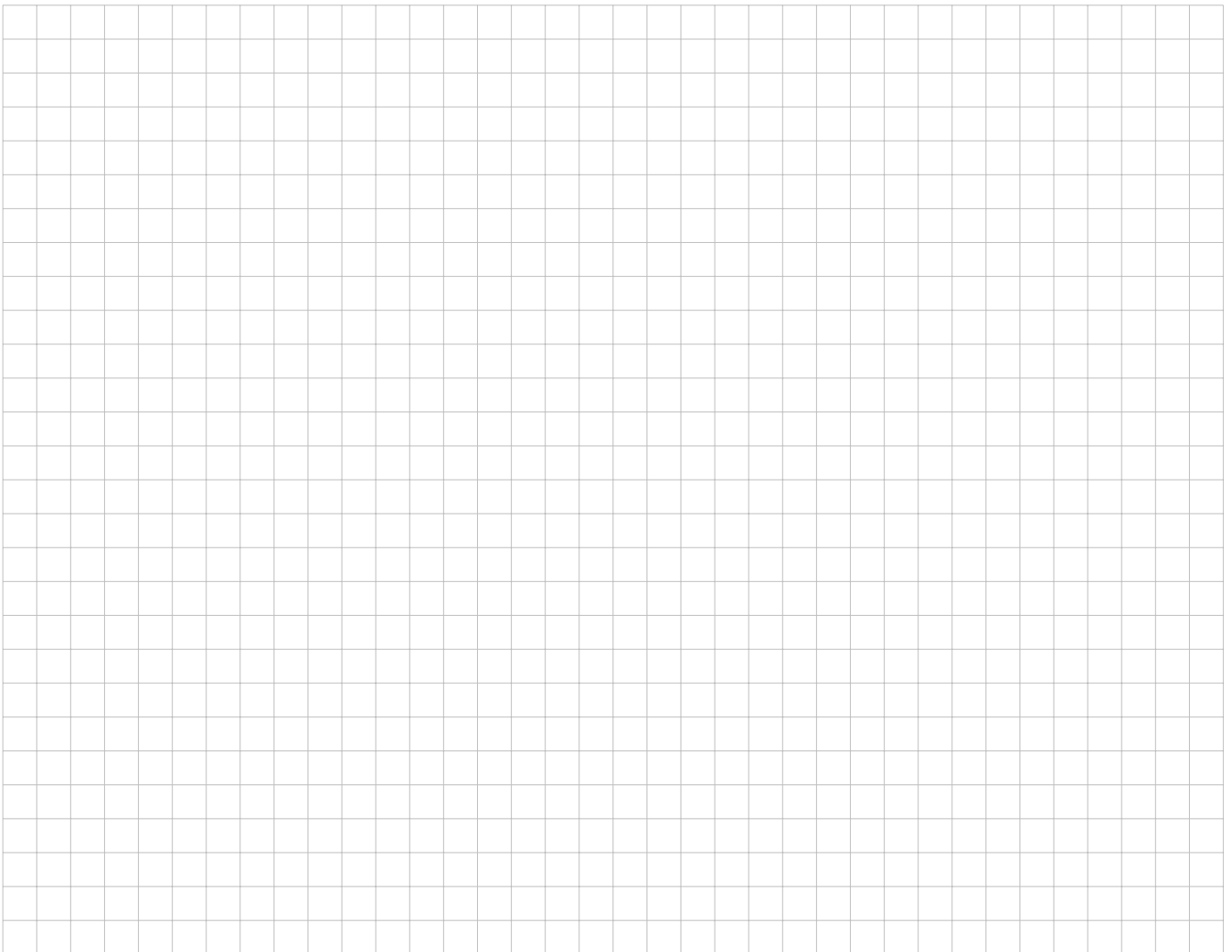
Hinweis: Diese Dokumentenreihe ist ein privates, von Prüfungsteilnehmenden erstelltes Projekt und steht in keiner offiziellen Verbindung zur ETH Zürich. Die Inhalte wurden weder von der ETH Zürich erstellt noch überprüft oder bestätigt. Alle Angaben, Prüfungsfragen, Erfahrungen, Tipps und Ressourcen basieren auf persönlichen Erinnerungen und Berichten und können daher unvollständig oder ungenau sein. Für verbindliche Informationen zu Prüfungsstoff, Ablauf, Reglementen und Anforderungen gelten ausschließlich die offiziellen Angaben der ETH Zürich.

1. Gegeben ist die folgende Zahlen: **17, 18, 20, 13, 20, 24, 16, 32**

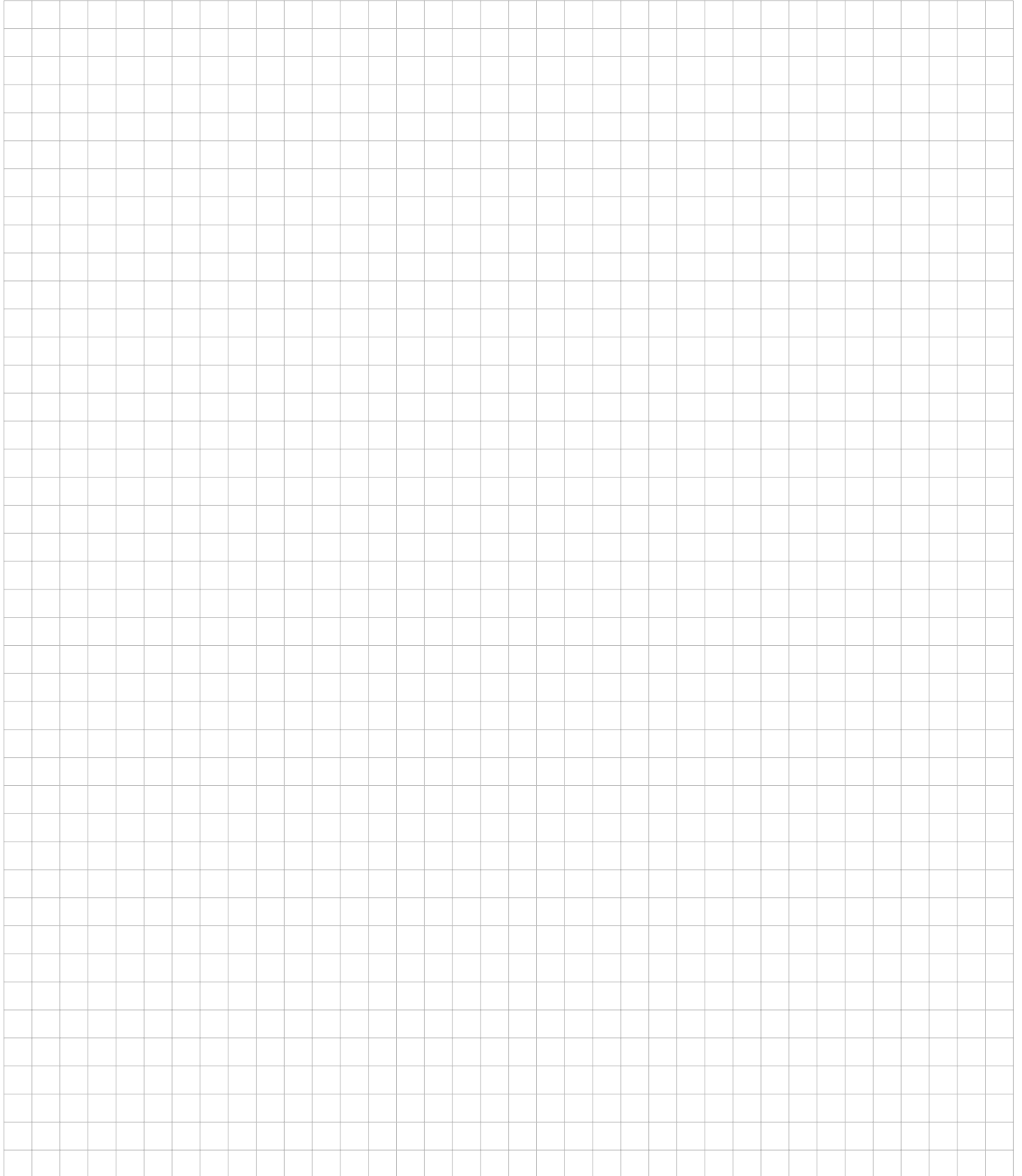
- Standardabweichung?

- Aritmetische Mittelwert?

- Median?



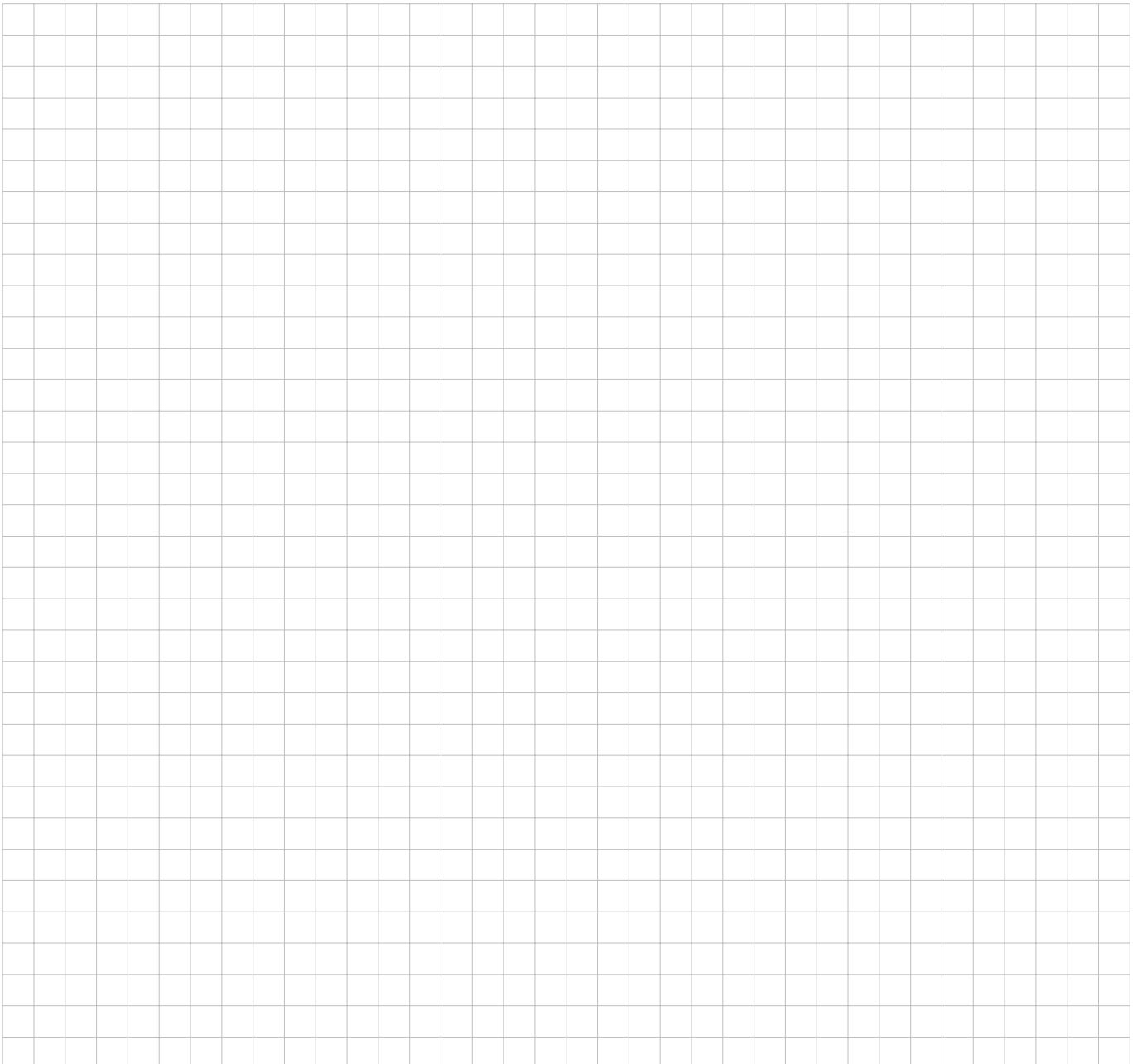
2. $z^2 = 8 - 6i$, welche mögliche Werte könnte z annehmen?



3. Bestimmen Sie diese Funktionen

- Nullstelle bei $x = 3$, Polstelle bei $x = -2$ und $x = 0$, und eine horizontale Asymptote bei $y = 2$

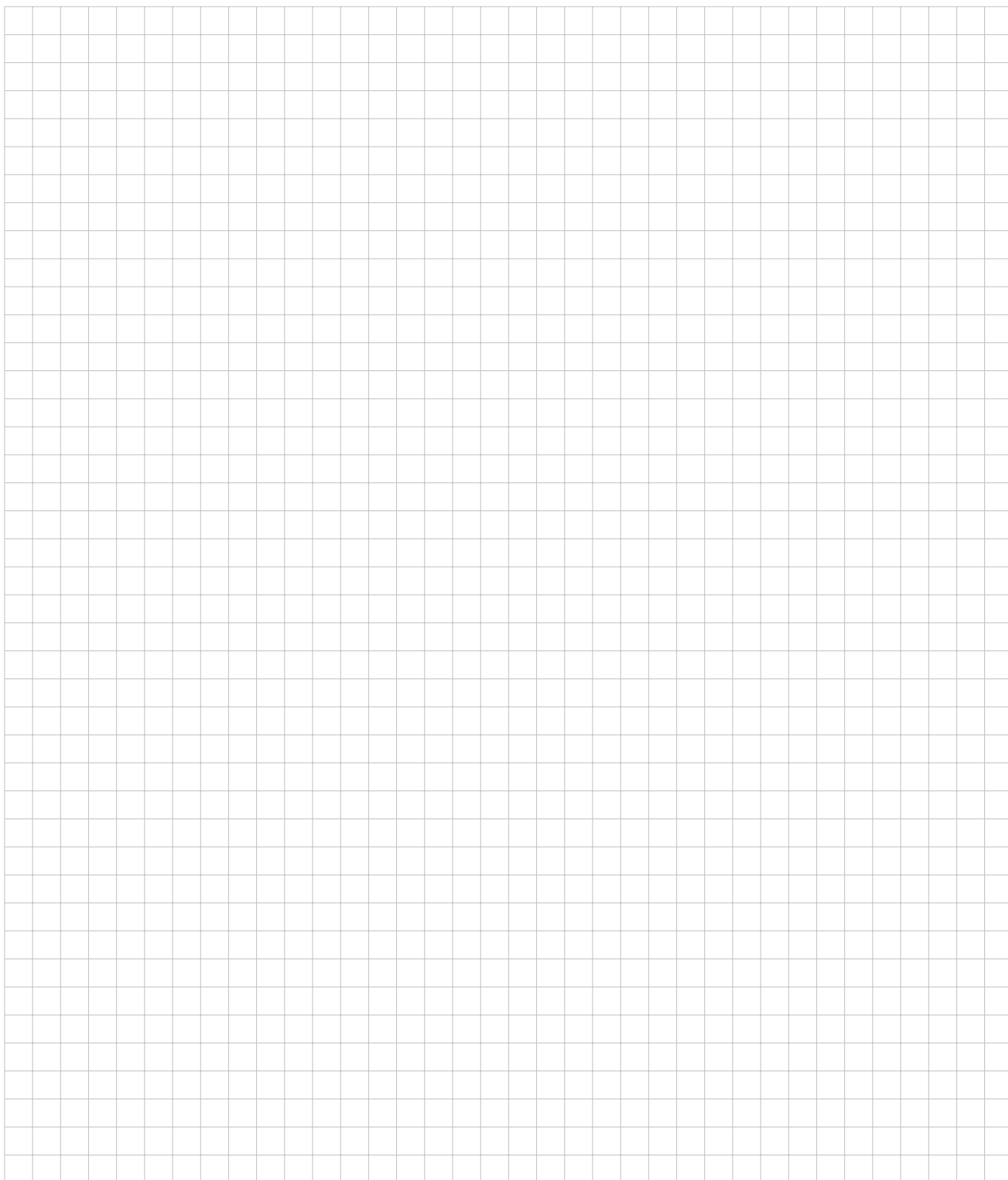
- $f(x) = a \cdot b^x$, $f(2) = 10$ und $f(7) = 100$



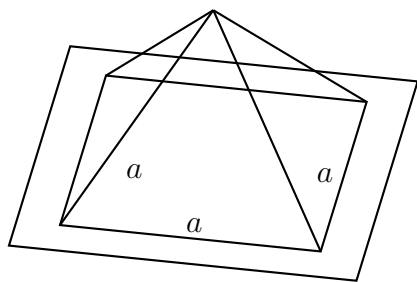
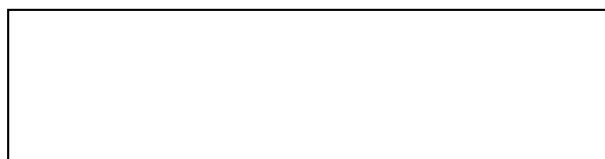
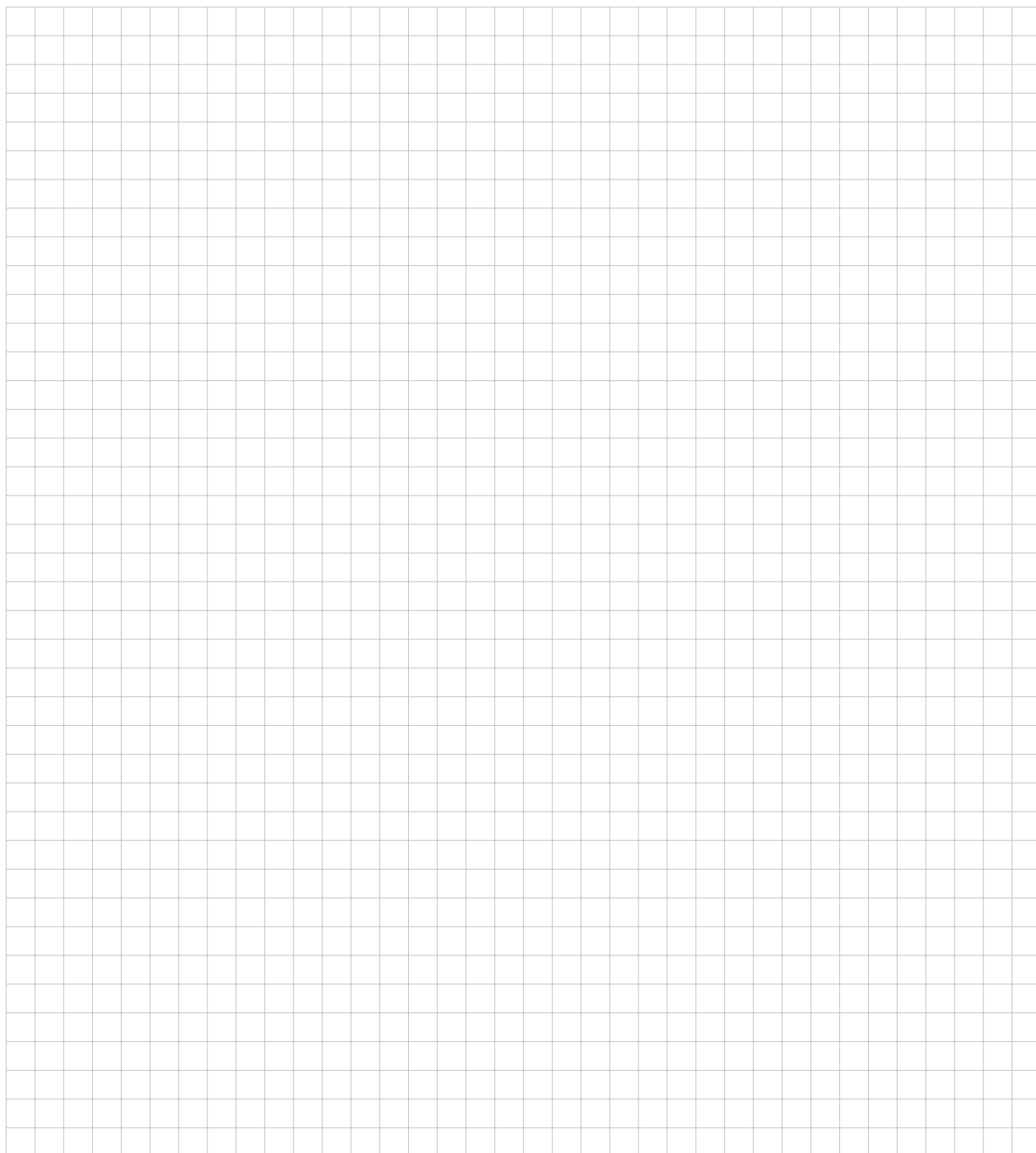
4. Berechnen Sie diese Integrale:

$$\int_1^{\infty} e^{-2x} dx$$

$$\int_1^e \frac{x^2 + 1}{x} dx$$



5. Berechnen Sie das Volumen einer quadratischen Pyramide mit Kantenlänge a (alle Kanten gleich lang).

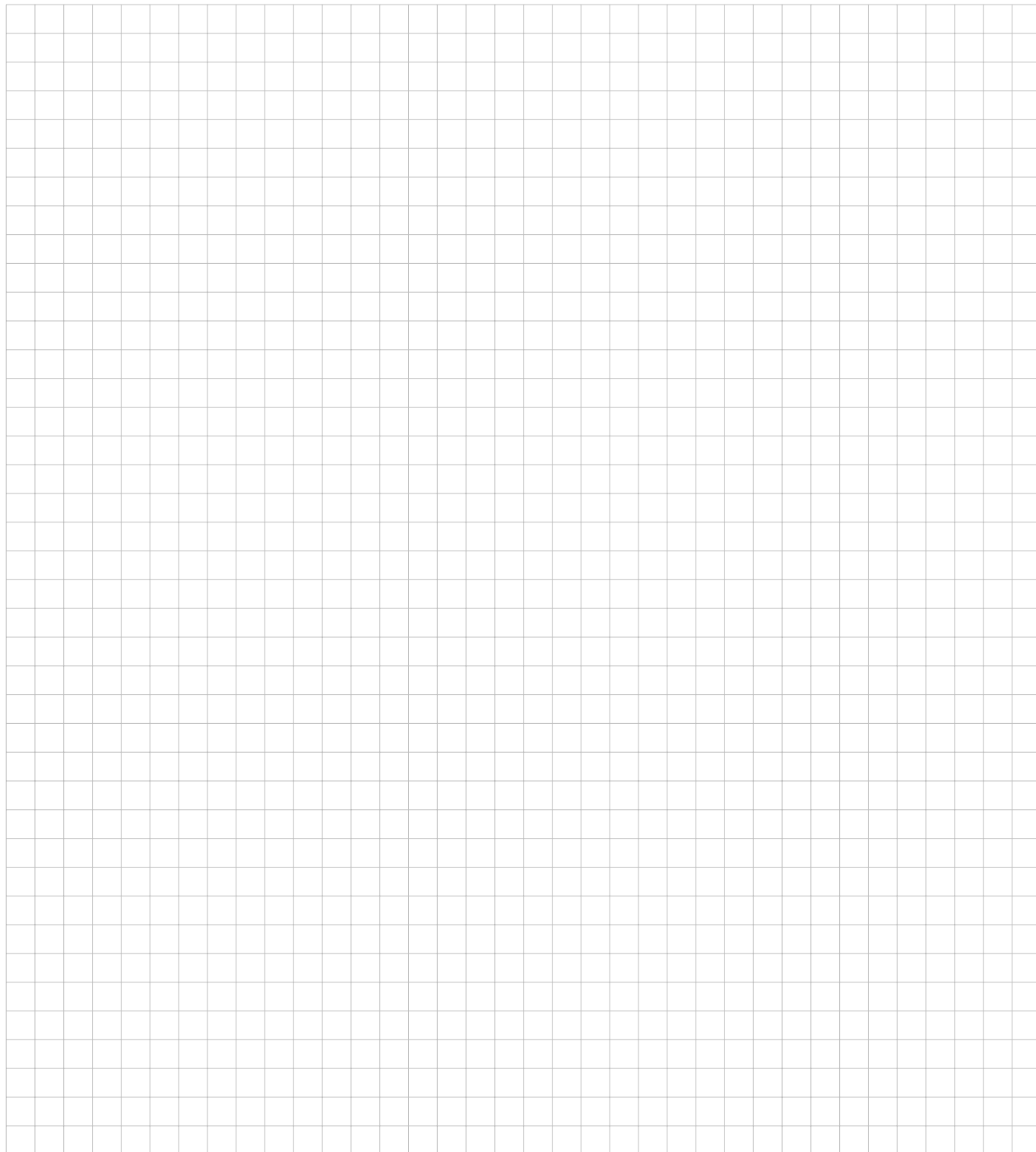


6. Gegeben sind die Geraden g und h :

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Untersuchen Sie, ob sich die beiden Geraden schneiden. Falls ja, bestimmen Sie den Schnittpunkt. Falls nein, berechnen Sie den minimalen Abstand der beiden Geraden.



7. Es gibt 2 Armenier, 3 Belgier und 4 Chilenen

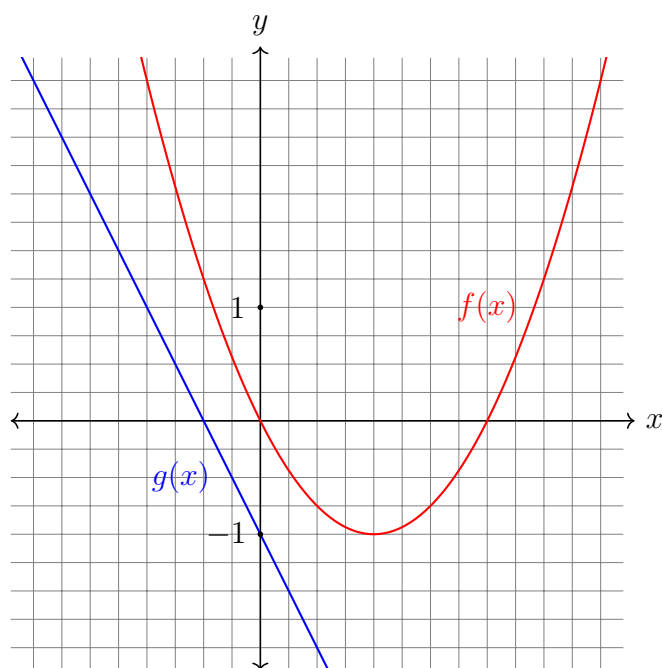
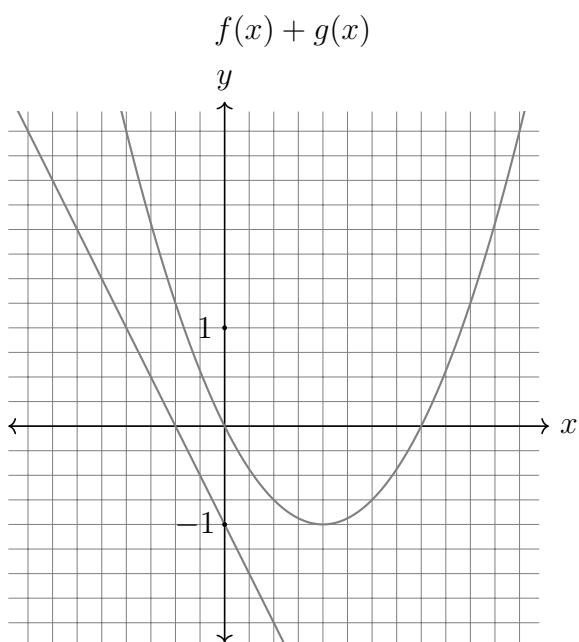
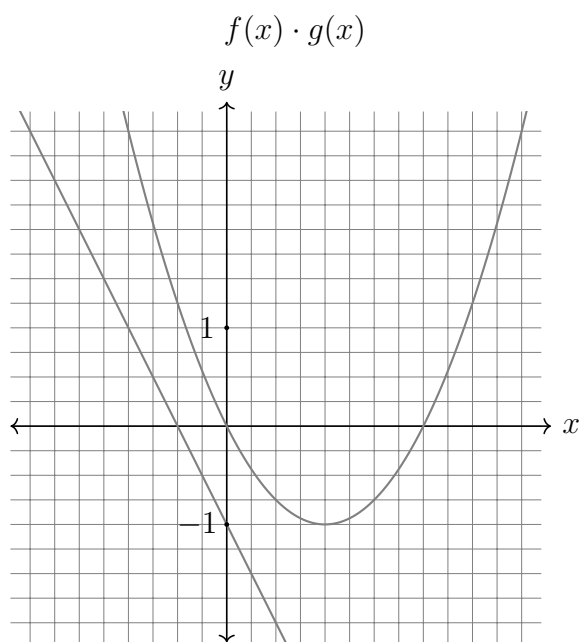
(a) Wie viele verschiedene Zweiergruppen können aus diesen Personen gebildet werden, wenn die Gruppen aus Personen unterschiedlicher Nationalitäten bestehen?

(b) Wie viele verschiedene Vierergruppen können gebildet werden, wenn mindestens eine Person aus Chile in der Gruppe enthalten ist?

--	--

--

8. Gegeben seien die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$. Zeichnen Sie $f(x) + g(x)$ und $f(x) \cdot g(x)$ an den entsprechenden Stellen unten ein. $f(x)$ und $g(x)$ sind als Orientierung für die unten einzutragenden Bereiche angegeben.



Lösungen

1. Zuerst müssen wir diese Zahlen in die richtige Reihenfolge bringen

13, 16, 17, 18, 20, 20, 24, 32

$$(a) \sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \rightarrow \sigma = 5,4543 \dots \approx \underline{5,46}$$

$$(b) \frac{13+16+17+18+20+20+24+32}{8} = \frac{160}{8} = \underline{20}$$

$$(c) \frac{18+20}{2} = \underline{19}$$

2. $z := a + bi, \quad a, b \in \mathbb{R}$

$$z^2 = (a + bi)(a + bi)$$

$$z^2 = a^2 + 2abi - b^2$$

$$\textcolor{red}{a^2 - b^2} + \textcolor{blue}{2abi} = \textcolor{red}{8} - \textcolor{blue}{6i}$$

$$\textcolor{blue}{2ab} = \textcolor{blue}{-6}$$

$$a = \frac{-3}{b}$$

$$\textcolor{red}{a^2 - b^2} = \textcolor{red}{8}$$

$$\left(\frac{-3}{b}\right)^2 - b^2 = 8$$

$$\frac{9}{b^2} - b^2 = 8$$

$$9 - b^4 = 8b^2$$

$$0 = b^4 + 8b^2 - 9$$

$$0 = (\textcolor{red}{b^2 + 9})(\textcolor{orange}{b^2 - 1})$$

$$(\textcolor{red}{b^2 + 9}) = 0 \rightarrow b \neq \pm 3i \quad (\text{nicht möglich, } b \in \mathbb{R})$$

$$(\textcolor{orange}{b^2 - 1}) = 0 \rightarrow b = \pm 1$$

$$b = 1 \rightarrow a = \frac{-3}{b} = -3$$

$$b = -1 \rightarrow a = \frac{-3}{b} = 3$$

$$z_1 = -3 + i$$

$$z_2 = 3 - i$$

$$z \in \underline{\{-3 + i, 3 - i\}}$$

3.

- (a) Eine Nullstelle bei $x = 3$ bedeutet, dass der Zähler den Faktor $(x-3)$ enthalten muss. Polstellen bei $x = -2$ und $x = 0$ bedeuten, dass der Nenner die Faktoren $(x+2)$ und x enthalten muss.

Die Funktion hat damit zunächst die Form

$$f(x) = a \cdot \frac{(x-3)}{x(x+2)}$$

Damit die Funktion eine horizontale Asymptote besitzt, müssen Zähler und Nenner denselben Grad haben. Der Nenner hat den Grad 2, da er die Faktoren x und $(x+2)$ enthält. Damit auch der Zähler den Grad 2 hat, muss der Faktor $(x-3)$ quadriert werden.

Somit ergibt sich:

$$f(x) = a \cdot \frac{(x-3)^2}{x(x+2)}$$

Für rationale Funktionen mit gleichem Grad im Zähler und Nenner ist die horizontale Asymptote gleich dem Quotienten der Leitkoeffizienten. Der Leitkoeffizient des Zählers ist a , der des Nenners ist 1. Daher gilt für die horizontale Asymptote $y = a$. Da die Asymptote $y = 2$ gegeben ist, folgt $a = 2$

Somit ergibt sich die gesuchte Funktion zu

$$f(x) = \frac{2(x-3)^2}{x(x+2)}$$

- (b) $f(x) = a \cdot b^x$, $f(2) = 10$ und $f(7) = 100$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = a \cdot b^x \\ f(2) = 10 \\ f(7) = 100 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} f(2) = a \cdot b^2 = 10 \\ f(7) = a \cdot b^7 = 100 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \frac{f(2)}{f(7)} = \frac{1}{b^5} = \frac{10}{100} = \frac{1}{10} \\ b^5 = 10 \rightarrow \underline{\underline{b}} = \sqrt[5]{10} = \underline{\underline{10^{\frac{1}{5}}}} \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} f(2) = a \cdot b^2 &= 10 \\ a(\sqrt[5]{10})^2 &= 10 \\ \underline{\underline{a}} &= \frac{10}{(\sqrt[5]{10})^2} = \frac{10}{10^{\frac{2}{5}}} = \underline{\underline{10^{\frac{3}{5}}}} \end{aligned}$$

$$f(x) = 10^{\frac{3}{5}} \cdot 10^{\frac{x}{5}}$$

4. Integralaufgaben

(a) $\int_1^\infty e^{-2x} dx$

$$\begin{aligned}\int_1^\infty e^{-2x} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b e^{-2x} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{-2x}}{-2} \right]_1^b \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} (e^{-2b} - e^{-2}) \\ &= -\frac{1}{2} (0 - e^{-2}) \\ &= \frac{1}{2e^2}\end{aligned}$$

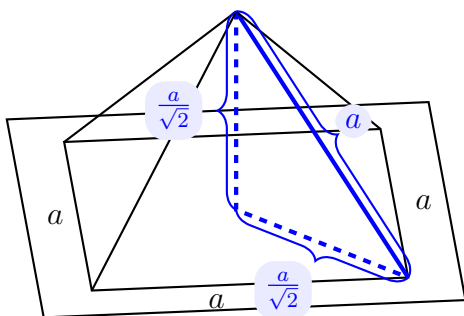
(b) $\int_1^e \frac{x^2+1}{x} dx$

$$\begin{aligned}\int_1^e \frac{x^2+1}{x} dx &= \int_1^e \left(x + \frac{1}{x} \right) dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} + \ln|x| \right]_1^e \\ &= \left(\frac{e^2}{2} + \ln(e) \right) - \left(\frac{1}{2} + \ln(1) \right) \\ &= \left(\frac{e^2}{2} + 1 \right) - \frac{1}{2} \\ &= \frac{e^2 + 1}{2}\end{aligned}$$

5. Allgemein gilt für das Volumen einer Pyramide $V = \frac{1}{3}Gh$ wobei G die Grundfläche und h die Höhe der Pyramide ist. Da die Grundfläche ein Quadrat mit Seitenlänge a ist, gilt $G = a^2$. Es bleibt, die Höhe h zu bestimmen.

Der Abstand vom Mittelpunkt der Grundfläche zu einer Ecke beträgt die halbe Diagonale des Quadrats:

$$r = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$



Die Seitenkante (vom Apex zu einer Ecke) hat ebenfalls die Länge a . Damit ergibt sich ein rechtwinkliges Dreieck mit Hypotenuse a , Kathete r und Höhe h . Nach dem Satz des Pythagoras:

$$a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{2}} \right)^2$$

$$a^2 = h^2 + \frac{a^2}{2} \Rightarrow h^2 = \frac{a^2}{2} \Rightarrow h = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

Nun setzen wir in die Volumenformel ein:

$$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a^3}{3\sqrt{2}} \implies \underline{V = \frac{\sqrt{2}}{6} a^3}$$

$$6. \quad \begin{array}{ll} x_g = 2 + 4t & x_h = 4 \\ y_g = -t & y_h = 4 + s \\ z_g = 1 - t & z_h = 5 - s \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Falls ein Schnittpunkt existiert, müssen beide} \\ \text{Geraden für dieselben Parameter } s, t \text{ denselben} \\ \text{Punkt liefern.} \end{array} \right.$$

$$x_g = x_h \rightarrow 2 + 4t = 4 \rightarrow t = \frac{1}{2}$$

$$y_g = y_h \rightarrow \begin{array}{l} -t = 4 + s \\ \frac{-1}{2} = 4 + s \end{array} \rightarrow s = \frac{-9}{2}$$

$$\begin{array}{l} z_g \stackrel{?}{=} z_h \rightarrow 1 - t = 5 - s \\ 1 - \frac{1}{2} = 5 - \frac{-9}{2} \\ \frac{1}{2} \neq \frac{14}{2} \end{array}$$

Daraus folgt, dass es kein gemeinsames Parameterpaar (s, t) gibt, das alle drei Koordinatengleichungen gleichzeitig erfüllt. Die Geraden schneiden sich also nicht.

Die Richtungsvektoren der beiden Geraden sind $\vec{v}_g = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_h = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Da diese Vektoren keine Vielfachen voneinander sind, sind die Geraden nicht parallel. Da sie sich außerdem nicht schneiden, sind sie windschief.

Für den minimalen Abstand zweier windschiefer Geraden verwendet man

$$d = \frac{|(\vec{p}_g - \vec{p}_h) \cdot (\vec{v}_g \times \vec{v}_h)|}{|\vec{v}_g \times \vec{v}_h|}$$

$$\text{Mit } \vec{p}_g = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_h = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

erhält man

$$\vec{p}_g - \vec{p}_h = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Nun berechnen wir das Kreuzprodukt:

$$\vec{v}_g \times \vec{v}_h = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Damit gilt:

$$(\vec{p}_g - \vec{p}_h) \cdot (\vec{v}_g \times \vec{v}_h) = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = -4 - 16 - 16 = -36$$

Außerdem ist

$$|\vec{v}_g \times \vec{v}_h| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 4^2} = \sqrt{36} = 6$$

Also:

$$d = \frac{|-36|}{6} = 6$$

$$\underline{\underline{d = 6}}$$

7. (a) Zweiergruppen mit unterschiedlichen Nationalitäten können nur sein:

Armenier + Belgier $\rightarrow 2 \cdot 3 = \mathbf{6}$ mögliche Gruppen

Armenier + Chilene $\rightarrow 2 \cdot 4 = \mathbf{8}$ mögliche Gruppen

Belgier + Chilene $\rightarrow 3 \cdot 4 = \mathbf{12}$ mögliche Gruppen

Gesamtanzahl = $6 + 8 + 12 = \underline{26}$

(b) Statt direkt zu zählen, verwenden wir das Gegenereignis:

mindestens eine Chilene = alle Gruppen - keine Chilenen

Alle möglichen Vierergruppen $\rightarrow \binom{9}{4} = 126$

Gruppen ohne Chilenen (nur mit 5 Personen (Armenier + Belgier)) $\rightarrow \binom{5}{4} = 5$

Ergebnis $\rightarrow 126 - 5 = \underline{121}$

8. Funktion zeichnen

